МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО

Шумен, ул. “Цар Калоян” №1, тел./факс 800-373; e-mail : rio-shumen@icon.bg

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 ГОД.

ТЕМА ЗА XII КЛАС

1 задача. Да се определи множеството M от стойности на реалния параметър *m*, за които квадратното уравнение $x^2-(m+2)x+5m-11=0$ има два различни реални корена x_1 и x_2. Да се намерят точките, в които функцията $f(x)=x_1^3+x_2^3$, дефинирана за $m\in M$, има локални екстремуми. Да се определи вида и да се намерят тези локални екстремуми.

7 точки

2 задача. Дадена е пирамида с връх M и основа трапец $ABCD$ със страни $AB=2a$, $BC=CD=AD=a$. Околната стена CDM е перпендикулярна на равнината на основата и $CM=DM=b$.

а) Да се намери обемът на пирамидата.

3 точки

б) Да се докаже, че около пирамидата може да се опише сфера и да са намери повърхнината на тази сфера.

4 точки

3 задача. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a,* за които уравненията

$$3^{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.3^{x+1}-2^{2x+2}=0 \quad (1) \quad \text{и} \quad 4^x+|a|.2^x+(2-a).2^{-x}=3 \quad (2)$$

са еквивалентни (т.е. всеки корен на (1) е корен на (2) и всеки корен на (2) е корен на (1))

7 точки

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4 часа.

ЖЕЛАЕМ ВИ УСПЕХ!

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

12.1 $x^2-(m+2)x+5m-11=0 \quad x_1 \neq x_2 \;\; и \;\; x_{1,2} \in R \Rightarrow D>0$

$(m+2)^2-4(5m-11)>0 \qquad m^2+4m+4-20m+44>0$

$m_1=4 \quad m_2=12 \qquad M: m \in (-\infty;4) \cup (12;+\infty)$

$$f(m)=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=$$

$$=(m+2)\left[(m+2)^2-3(5m-11)\right]=m^3-9m^2+15m+74$$

$f^{'}(m)=3m^2-18m+15=0$

$f(1)\max=1-9+15+74=81 \qquad (1;81)\max \qquad 5\notin M$

За съображение на D>0 – **1 т.**
За разписване на решенията на неравенството – **1 т.**
За преобразуване на сумата на корените – **2 т.**
За намиране на екстремума - **2 т.**, за определяне на вид – **1 т.**

12.2. а) $\triangle DCM \quad MH \perp ABCD \qquad MH=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$

$DD_1 \perp AB_1 \quad \triangle ADD_1 \Rightarrow AD_1=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2};\ AD=a \qquad DD_1=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD}=\frac{2a+a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \qquad V=\frac{1}{3}S_{ABCD}MH=\frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}.\sqrt{4b^2-a^2}=\frac{a^2.\sqrt{3}.\sqrt{4b^2-a^2}}{8}$

За всеки отделен резултат **(6 х 0,5 т.)**
б) $Ако\ \exists\, \sigma(0,R) \Rightarrow 0 \in e \perp ABCD$ *и минава през центъра на описаната окръжност ABCD*

$ON \perp ABCD \qquad MN \perp AB \Rightarrow ON \parallel MH;$

$OA=OB=OC=OD=OM=R \qquad N-$ *център на описана окръжност за ABCD*

За всеки извод поотделно – **4 х 0,5 т. = 2 т.**

$\triangle AON \quad ON=x \quad OA=R \Rightarrow R^2=x^2+a^2$

$ONHM-$ *трапец правоъгълен* $\Rightarrow ON=x,\ NH=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ MN=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2},\ MP=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}-x$

$$\left|\begin{array}{l} R^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}-x\right)^2 \Rightarrow x=\frac{4b^2-2a^2}{4\sqrt{4b^2-a^2}} \\ R^2=x^2+a^2 \end{array}\right.$$

$R^2=\frac{4b^4+12a^2b^2-3a^4}{4(4b^2-a^2)} \qquad S=4\pi R^2=\pi\frac{4b^4+12a^2b^2-3a^4}{4b^2-a^2}$

За всяка връзка преди системата – (**2 х 0.5 точки = 1 т.**); за решаване на системата и извод за S –(**1 т.)**

12.3. $3^{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.3^{x+1}-2^{2x+2}=0 \Leftrightarrow 3^{2x}+2^x.3^x.3-2^{2x}.2^2=0/:2^{2x}>0$ **(1 т.)**

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+3.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-4=0$ пол. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t>0$ (**0,5 т.)** и получаваме $t^2+3t-4=0$

$t_1=-4$ *не е реш.* **(0.5 т.)**

$t_2=1 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1\Rightarrow x=0$

$1+|a|.2^0+(2-a).2^0=3\Leftrightarrow |a|=a\Rightarrow a\geq 0$ **(1 т.)**

$\Rightarrow (2) \quad 4^x+a.2^x+(2-a).2^{-x}=3 \quad пол.\ 2^x=y>0$ и

$y^2+ay+(2-a).\frac{1}{y}=3\Leftrightarrow y^3+ay^2+2-a-3y=0\Leftrightarrow y^3+ay^2-y-2y-a+2=0\Leftrightarrow$

$y\left(y^2-1\right)+a\left(y^2-1\right)-2(y-1)=0\Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+(a+1)y+a-2\right)=0$ **(1,5 т.)**

$y=1 \quad или \quad y^2+(a+1)y+a-2=0 \quad (3)$

$D=(a+1)^2-4(a-2)=a^2-2a+9, \quad D>0\ за\ \forall a$ **(0,5 т.)**

За уравнението (3) имаме два корена y_1 и y_2

Трябва : 1 случей $y_1=y=1, \quad y_2\leq 0$ или 2 случей $y_1\leq 0, y_2\leq 0.$

- Ако $y_1=1, \quad 1+(a+1).1+a-2=0\Rightarrow a=0$ **(0,5 т.)**

- Ако $y_1\leq 0$ и $y_2\leq 0\Rightarrow \begin{vmatrix} y_1+y_1=-(a+1)\leq 0 \\ y_1.y_2=(a-2)\geq 0 \end{vmatrix}\Rightarrow \begin{vmatrix} a\geq -1 \\ a\geq 2 \end{vmatrix}\Rightarrow a\geq 2$ - уравненията са еквивалентни **(1,5 т.)**