МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ХАСКОВО

6300 Хасково, ул. "П. Евтимий" № 2, тел./факс 038/62 25 03, e-mail: rio_haskovo@mon.bg

Национална олимпиада по математика
Общински кръг – 25 февруари 2010 год.

ТЕМА ЗА X КЛАС

1 зад. а) Да се реши неравенството $\dfrac{x^2+5x+4}{x^4-15x^2-16}\geq 0$. (5 точки)

б) Да се провери дали числото $M=\left(7^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{4}}:\dfrac{|-7|^0\sqrt{7}}{7^{-\frac{1}{2}}}$ е решение на неравенството.

(2 точки)

2 зад. Дадена е функцията $f(x)=x^2-(2k+1)x+2k+4$, където **k** е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на **k**, за които уравнението $f(x)=0$ има два отрицателни корена.

(2 точки)

б) За кои стойности на реалния параметър **k** е в сила неравенството $\sqrt{x_1^2x_2+x_1x_2^2-3}>x_1x_2-2$, където x_1 и x_2 са реални корени на уравнението $f(x)=1$?

(5 точки)

3 зад. Медианата CM в ΔABC е разделена от точките M_1, M_2, M_3 на четири равни части, така че $CM_1=M_1M_2=M_2M_3=M_3M$. През точките на делене и върха A на триъгълника са построени лъчи, пресичащи BC съответно в точките B_1, B_2 и B_3.

а) Намерете дължината на отсечките CB_1, B_1B_2, B_2B_3 и B_3B, ако $BC=a$

(4 точки)

б) Намерете лицето на ΔABB_3, ако лицето на ΔABC е $\boldsymbol{S}$.

(3 точки)

Време за работа : 4 астрономически часа

Желаем Ви успех!

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ -25.02.2010 г.
ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
X клас

1. а) Разлагане на множители $\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-4)(x+4)(x^2+1)}$ **2 точки**

Определяне на допустими стойности: $x \neq \pm 4$ **1 точка**

Намиране на интервалите на решение на неравенството **2 точки**

б) $M=\left(7^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{4}} : \dfrac{|-7|^0\sqrt{7}}{7^{-\frac{1}{2}}} = 7^{\sqrt[3]{2^3}} : \left(1.\sqrt{7}.\sqrt{7}\right) = 7^2 : 7 = 7$ **2 точки**

$M = 7 \in (4;+\infty)$

2 зад. а) $D = 4k^2 - 4k - 15$; $x_1 + x_2 = 2k+1$; $x_1x_2 = 2k+4$ **1 точка**

$k \in \left(-2;-\dfrac{3}{2}\right]$ **1 точка**

б) $x^2-(2k+1)x+2k+3=0$

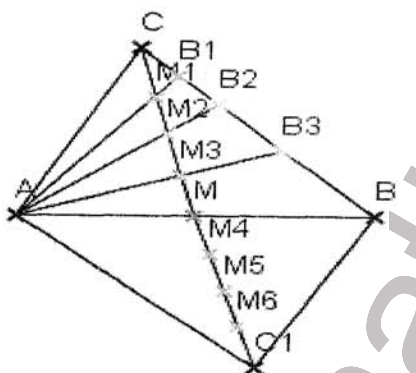
$D = 4k^2-4k-11$; $x_1+x_2=2k+1$; $x_1x_2=2k+3$ **1 точка**

Намерено решението на неравенството $4k^2-4k-11 \geq 0$ **1 точка**

Намерено решението на ирационалното неравенството **2 точки**

Намерени стойностите на реалния параметър $k \in (-\infty;-2] \cup \left[\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$ **1 точка**

3 зад.



Нека $CB_1 = x, B_1B_2 = y, B_2B_3 = z, B_3B = d$. Продължаваме MC до точка C_1, така че $MC_1 = MC$, но $AM = MB$ следователно AC_1BC е успоредник, от което следва че $AC_1 = BC = a$.

(2 точки)

Нека $MM_4 = M_4M_5 = M_5M_6 = M_6C_1$.

От $CB_1 \parallel AC_1 \Rightarrow \triangle CM_1B_1 \sim \triangle AM_1C_1 \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow x = \dfrac{a}{7}$

От $CB_2 \parallel AC_1 \Rightarrow \triangle CM_2B_2 \sim \triangle AM_2C_1 \Rightarrow \dfrac{x+y}{a} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{4a}{21}$

От $CB_3 \parallel AC_1 \Rightarrow \triangle CM_3B_3 \sim \triangle AM_3C_1 \Rightarrow \dfrac{x+y+z}{a} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow z = \dfrac{4a}{15}$

Отсечката $d = a-(x+y+z) \Rightarrow d = \dfrac{2a}{5}$. **(2 точки)**

б) Построяваме височините B_3H_1 в $\triangle ABB_3$ и CH_2 в $\triangle ABC$.

$\triangle BH_1B_3 \sim \triangle BH_2C \Rightarrow \dfrac{B_3H_1}{CH_2} = \dfrac{d}{a} = \dfrac{2}{5}$ **1 точка**

$S_{\triangle ABB_3} = \dfrac{AB.B_3H_1}{2}, S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB.CH_2}{2}$ **1 точка**

$\Rightarrow S_{\triangle ABB_3} = \dfrac{2}{5}S$ **1 точка**

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максималния брой точки.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.