<u>МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ</u>

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

11. 04. 2010 год.

ВАРИАНТ 3

Задача 1.

Решете уравнението: $\frac{t-2}{t+1}=\frac{2}{t-1}$.

РЕШЕНИЕ: Дефиниционното множество е: $t \neq \pm 1$. Тогава получаваме:
$(t-2)(t-1)=2(t+1) \Rightarrow t^2-5t=0 \Rightarrow t(t-5)=0 \Rightarrow t_1=0, t_2=5$.

Задача 2.

2.1 Решете уравнението:

$$2^x-2^{2-x}=3.$$

РЕШЕНИЕ: Нека $y=2^x>0$.

Тогава $y-2^2y^{-1}=3, y>0 \Rightarrow y^2-3y-4=0, y>0 \Rightarrow y_1<0<y_2=4.$

Следователно решението на уравнението е $x=\log_2 4=2$.

2.2 При какви стойности на реалния параметър p уравнението

$$4x^2-35x+4p^3=0$$

има реални корени x_1 и x_2, за които $x_1=x_2^2$.

РЕШЕНИЕ: Квадратното уравнение има реални корени, когато дискриминантата му D е неотрицателна. Следователно $35^2-(4p)^3 \geq 0$, откъдето следва $p \leq \left(\frac{35}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ и с помощта на формулите на Виет, получаваме системата:

$$\left|\begin{aligned} & x_1+x_2=\frac{35}{4} \\ & x_1x_2=p^3 \\ & x_1=x_2{}^2 \\ & p \leq \left(\frac{35}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} & x_1+x_2=\frac{35}{4} \\ & x_2{}^3=p^3 \\ & x_1=x_2{}^2 \\ & p \leq \left(\frac{35}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} & p^2+p-\frac{35}{4}=0 \\ & x_2=p \\ & x_1=p^2 \\ & p \leq \left(\frac{35}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right. .$$

От полученото квадратно уравнение за реалния параметър p намираме търсените стойности: $p_1=-\frac{7}{2}, p_2=\frac{5}{2} \leq \left(\frac{35}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Задача 3. Дадена е функцията

$y = f(x) = x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - 3x - 1, \quad x \in (-\infty; \infty)$, където c е реален параметър.

3.1 Да се покаже, че функцията $y = f(x)$ има локален минимум и локален максимум за всяка стойност на параметъра c.

РЕШЕНИЕ: $f'(x) = 3(x^2 - 2cx + c^2 - 1) = 3\{(x-c)^2 - 1\}$. Производната се анулира в точките: $x_1 = c - 1, x_2 = c + 1$. Тогава, за произволна фиксирана стойност на c, с изследване на знака на производната, получаваме, че $y = f(x)$ е строго растяща в $(-\infty, c-1)$, строго намаляваща в $(c-1, c+1)$ и строго растяща в $(c+1, \infty)$.

В частност, при $x = c - 1$ функцията има локален максимум: $y_{\max} = f(c-1)$, а при $x = c + 1$ – локален минимум: $y_{\min} = f(c+1)$, за всяка фиксирана стойност на c.

3.2 Да се намерят стойностите на параметъра c, за които
$y_{\min} + y_{\max} = 2c^3 + 2c^2 - 7$.

РЕШЕНИЕ: $y_{\min} + y_{\max} = f(c+1) + f(c-1)$

$f(c+1) + f(c-1) = 2c^3 + 2.3c - 2.3c.c^2 - 2.3c + 2.3c^2.c - 2.3c - 2.1 = 2c^3 - 6c - 2$.

Следователно $2c^3 - 6c - 2 = 2c^3 + 2c^2 - 7 \Rightarrow 2c^2 + 6c - 5 = 0$.

Корените на полученото уравнение са:

$$c_1 = \frac{-3 - \sqrt{19}}{2}, c_2 = \frac{-3 + \sqrt{19}}{2}$$

Задача 4. Три от страните на трапец са равни помежду си, лицето му е $8\,cm^2$, а два от ъглите му са равни на 30^0. Да се намерят дължините на страните му.

РЕШЕНИЕ: Означаваме голямата основа на трапеца с a, а малката – с b, $a > b$. Тъй като три от страните на трапеца са равни, трапецът е равнобедрен, с бедро, равно на a или на b. Означаваме бедрото на трапеца с c, а височината му – с h. Тогава c е хипотенузата на правоъгълен триъгълник с остри ъгли 30^0 и 60^0, а h е катетът, лежащ срещу ъгъл 30^0, следователно $h = \frac{c}{2}$. Другият катет на този триъгълник е: $\frac{a-b}{2} = c\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следователно $a = b + c\sqrt{3}$. В частност $a > c\sqrt{3} > c \Rightarrow b = c; a = c(\sqrt{3} + 1)$.

Лицето на дадения трапец е $8\,cm^2$ и е равно на

$\frac{a+b}{2}h = \frac{2+\sqrt{3}}{4}c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{32}{2+\sqrt{3}} = 32(2-\sqrt{3}) = 16(\sqrt{3}-1)^2$. Тогава:

$b = c = 4(\sqrt{3} - 1)\ cm,$

$a = c(\sqrt{3}+1) = 4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 8\ cm.$