<u>МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ</u>

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

27.07.2009 г.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Решете системата:

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{2x-3y}{4}-\dfrac{2y-3x}{2}=1 \\ \quad -2x+y=2\end{array}\right. .$$

РЕШЕНИЕ: $\left|\begin{array}{l}\dfrac{2x-3y}{4}-\dfrac{2y-3x}{2}=1 \\ \quad -2x+y=2\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}8x-7y=4 \\ -2x+y=2\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}-6x=18 \\ -3y=12\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=-3 \\ y=-4\end{array}\right.$. Отг.: $(-3,-4)$.

Задача 2. Решете уравненията:

2.1 $(11^x)^2-12.(11^x)+11=0$;

РЕШЕНИЕ: Нека $y=11^x>0, \forall x\in(-\infty,\infty)$. Тогава, за такива y: $y^2-12y+11=0$.
Решенията на последното уравнение са $y_1=1>0, y_2=11>0$.
Следователно даденото уравнение има два корена: $x_1=0, x_2=1$.

2.2 $\log_3(x^2-6x+8)=1$.

РЕШЕНИЕ: Множеството от допустими стойности на неизвестното се определя от неравенството: $x^2-6x+8>0$, т.е.: $(x-2)(x-4)>0 \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$.
За тези стойности на x решаваме уравнението $x^2-6x+8=3 \Rightarrow x^2-6x+5=0$ и получаваме: $x_1=1, x_2=5$, които са и решенията на даденото уравнение.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=\log_3\dfrac{1-x}{1+x}$:

3.1 определете дефиниционното множество D на $f(x)$;

3.2 докажете, че за всеки две стойности $x, y\in D$ е изпълнено равенството

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right);$$

3.3 намерете производната на функцията $F(x)=3^{f(x)}$.

РЕШЕНИЕ:

3.1: Дефиниционното множество D се определя от неравенствата: $1+x\neq 0, \dfrac{1-x}{1+x}>0$,
откъдето следва $(1-x)(1+x)>0 \Rightarrow x\in(-1,1)$. Отг.: $D=(-1,1)$.

3.2: За всеки две стойности $x, y\in D$ е изпълнено $1+xy>0$. Тогава $f(x)+f(y)=$

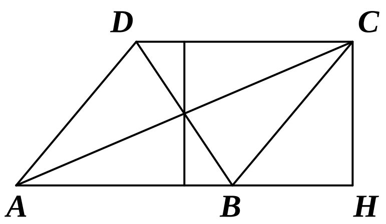
$$=\log_3\frac{1-x}{1+x}+\log_3\frac{1-y}{1+y}=\log_3\left(\frac{1-x}{1+x}.\frac{1-y}{1+y}\right)=\log_3\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}=\log_3\frac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

(Да отбележим, че от $\dfrac{1-x}{1+x}>0, \dfrac{1-y}{1+y}>0 \Rightarrow \dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}>0 \Rightarrow |x+y|<1+xy \quad (|x|<1, |y|<1)$.)

3.3: $F(x)=3^{f(x)}=\dfrac{1-x}{1+x} \Rightarrow F'(x)=\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\dfrac{-2}{(1+x)^2}, x\in D$.

Задача 4. В ромб е вписан кръг с радиус R. Големият диагонал на ромба е с дължина $4R$. Да се намери лицето на частта от ромба, която е вън от кръга.

РЕШЕНИЕ: Височината CH на дадения ромб $ABCD$ е с дължина $2R$, а диагоналът му е (по условие) $4R$. Тогава острият ъгъл на ромба е с мярка 60° (в частност ΔABD и ΔBCD са равностранни).



От правоъгълния ΔBHC намираме дължината на страната на ромба:

$$BC = \frac{CH}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2CH}{\sqrt{3}} = \frac{4R}{\sqrt{3}}.$$

Тогава лицето на ромба $ABCD$ е равно на $AB.CH = \frac{8R^2}{\sqrt{3}}$ и, тъй като лицето на вписания кръг е равно на πR^2, получаваме лицето S на частта от $ABCD$, която остава извън този кръг: $S = \left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \pi\right)R^2$.