МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

14.07.2009 г.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Намерете най-малкия и най-големия от реалните корени на уравнението:

$$\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2+7x+12\right)=0.$$

РЕШЕНИЕ: Корените на даденото уравнение са $x_1=2, x_2=3, x_3=-4, x_4=-3$.
Най-малкият от тях е $x_3=-4$, а най-големият – $x_2=3$.

Задача 2. Решете уравненията:

2.1 $4^{(x-6)(x+5)}=1$;

РЕШЕНИЕ:
$4^{(x-6)(x+5)}=1 \Rightarrow (x-6)(x+5)=0$. Решенията на уравнението са $x_1=-5, x_2=6$.

2.2 $\log_2\sqrt{x^2+2x-20}=\log_2\sqrt{28}$.

РЕШЕНИЕ: Допустимите стойности на x са в множеството
$M=\left(-\infty,-1-\sqrt{21}\right)\cup\left(-1+\sqrt{21},\infty\right)$. За тези стойности получаваме:
$x^2+2x-20=28 \Rightarrow x^2+2x-48=0 \Rightarrow x_1=-8\in M$ и $x_2=6\in M$.

Задача 3. Дадена е функцията $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(2q+1)x^2+2qx+q$, $x\in(-\infty,\infty)$, където q е реален параметър.

3.1 Определете q, ако $F(0)=2$.

При получената стойност на q намерете:

3.2 първата и втората производни на функцията $F(x)$;

3.3 локалните екстремуми на $F(x)$;

3.4 интервалите на растене и намаляване на $F(x)$;

3.5 границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{x^3}$.

РЕШЕНИЕ:

3.1: $2=F(0)=q$, т.е. $q=2$.

При $q=2$ получаваме $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2+4x+2$, $x\in(-\infty,\infty)$.

3.2: $F'(x)=x^2+5x+4$; $F''(x)=2x+5$.

$F'(x)=(x+1)(x+4)$. Следователно при $x\in(-\infty,-4)\cup(-1,\infty)$ $F'(x)>0$, а при $x\in(-4,-1)$ $F'(x)<0$. В частност:

3.4: Интервалите на растене на $F(x)$ са $(-\infty,-4]$ и $[-1,\infty)$, а интервалът на намаляване – $[-4,-1]$;

3.3: При $x=-4$ $F(x)$ има локален максимум:

$$F(-4)=\frac{1}{3}(-4)^3+\frac{5}{2}(-4)^2+4(-4)+2=-\frac{64}{3}+40-16+2=\frac{14}{3},$$

а при $x=-1$ – локален минимум: $F(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{5}{2}(-1)^2+4(-1)+2=-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4+2=\frac{1}{6}$.

3.5: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{2x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)=\dfrac{1}{3}$.

Задача 4. В четириъгълник с лице 72 см^2 е вписана окръжност с радиус 4 см. Две съседни страни на четириъгълника са с дължини 6 см и 8 см. Да се намерят дължините на другите две страни.

РЕШЕНИЕ: Нека четириъгълникът е $ABCD$ със страни $AB=a$, $BC=b=6$ см, $CD=c=8$ см и $DA=d$.

Лицето на четириъгълника е $S=\dfrac{a+b+c+d}{2}R$, $S=72$ см^2, $R=4$ см. Следователно $a+b+c+d=36$ см, откъдето следва $a+d=22$ см.

От това, че в четириъгълника може да се впише окръжност, следва и, че $a+c=b+d$.

Тогава $d-a=c-b$. Така получаваме системата $\left|\begin{array}{l} d+a=22 \\ d-a=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} d=12 \\ a=10 \end{array}\right.$.

Следователно $DA=12$ см, $AB=10$ см.