<u>МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ</u>

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

10.05.2009 год.

ВАРИАНТ 3

Задача 1.

1.1. Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза:

$$\frac{9n^2-16m^2}{7n}\cdot\left(\frac{3m-4n}{4m^2-3mn}-\frac{3m+4n}{4m^2+3mn}\right);$$

РЕШЕНИЕ:
Множеството от допустими стойности е $n\neq 0, m\neq 0, 4m-3n\neq 0, 4m+3n\neq 0$.
За всички допустими стойности на m и n изразът е равен на 2.

1.2. Решете уравнението при $a=1$

$$2ax^2+(2\sqrt{2}\,a+3)x+a-1=0;$$

РЕШЕНИЕ: При $a=1$: $2x^2+(2\sqrt{2}+3)x=0$.

Корените на полученото уравнение са $x_1=0,\ x_2=-\sqrt{2}-\frac{3}{2}$.

1.3. За кои стойности на реалния параметър a корените на уравнението

$$2ax^2+(2\sqrt{2}\ a+3)x+a-1=0$$

са равни?
РЕШЕНИЕ:
Даденото квадратно уравнение има равни корени, когато неговата дискриминанта е нула.

$$D=\left(2\sqrt{2}a+3\right)^2-4.2a.(a-1)\Rightarrow\left(12\sqrt{2}+8\right)a+9=0\Rightarrow a=-\frac{9}{12\sqrt{2}+8}.$$

Задача 2.

2.1. Решете системата уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}16^{x+y}=256\\4^{x-y-1}=\ 4\end{array}\right..$$

РЕШЕНИЕ:

$$\left|\begin{array}{l}16^{x+y}=256\\4^{x-y-1}=\ 4\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}16^{x+y}=16^2\\4^{x-y-1}=\ 4\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x+y=2\\x-y=2\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=2\\y=0\end{array}\right..$$

2.2 Решете уравнението: $2\log_4 x+2\log_x 4=5$.

РЕШЕНИЕ:
Множеството от допустими стойности е $x>0, x\neq 1$. Нека $u=\log_4 x, u\neq 0$.

Тогава получаваме за u уравнението: $2u+\frac{2}{u}=5\Rightarrow 2u^2-5u+2=0, u\neq 0$.

Следователно $u_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4}\Rightarrow u_1=\frac{1}{2}, u_2=2$, откъдето получаваме корените и на изходното уравнение: $x_1=4^{u_1}=2, x_2=4^{u_2}=16$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=(p^2+5p)x^2-(2p^2+6)x$, където p е реален параметър.

3.1. Да се намерят стойностите на p, за които $f(1)=0$.

РЕШЕНИЕ:

$$f(1)=p^2+5p-(2p^2+6)=-p^2+5p-6.$$

Следователно $f(1)=0$ при $p_1=2$ и при $p_1=3$.

3.2. При $p=-1$ да се изследва функцията

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3.f''(x)-f'(x).$$

РЕШЕНИЕ:

При $p=-1$: $f(x)=-4x^2-8x$. $f'(x)=-8x-8$, $f''(x)=-8$. Тогава

$$g(x)=\frac{8}{3}\left(-x^3+3x+3\right).$$

Функцията $g(x)$ е полином от трета степен и като такава е дефинирана и непрекъсната за $\forall x\in(-\infty,\infty)$. $g(x)$ не е нито четна, нито нечетна. $g(x)$ не е периодична. $g(0)=8$. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$. $g'(x)=-8\left(x^2-1\right)$, $g''(x)=-16x$.

Следователно $g(x)$ е строго намаляваща в $(-\infty,-1)$, строго растяща в $(-1,1)$ и строго намаляваща в $(1,\infty)$. При $x=-1$ $g(x)$ има локален минимум: $g(-1)=\frac{8}{3}$, а при $x=1$ $g(x)$ има локален максимум: $g(1)=\frac{40}{3}$.

Локалният минимум на полинома $g(x)$ е с положителна стойност и е най-малката стойност на функцията в $(-\infty,0]$ (където $g(x)$ е изпъкнала). Локалният максимум на $g(x)$ е с положителна стойност и е най-голямата стойност на функцията в $(0,\infty]$ (където $g(x)$ е вдлъбната). В частност, уравнението $g(x)=0$ има само един реален корен (който се намира в интервала $(2,3)$, тъй като $g(2)=\frac{8}{3}>0>-40=g(3)$).

Задача 4. Бедрото на равнобедрен трапец има дължина c и се вижда от срещулежащите върхове под ъгъл 30^0. Да се намерят:

4.1. лицето на трапеца, ако диагоналът е равен на голямата му основа;

4.2. ъглите между бедро и диагоналите.

РЕШЕНИЕ:

Тъй като диагоналът и голямата основа на трапеца са равни, ъглите при голямата основа са равни на $\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

В частност, ъглите, които бедрото сключва с двата диагонала, са 75° и 45° (4.2.).

Означаваме голямата основа на трапеца с a, малката – с b и височината му – с h.

$\frac{a-b}{2}=c\sin 15^\circ, h=c\cos 15^\circ$; $a=\frac{h}{\sin 30^\circ}=2h=2c\cos 15^\circ \Rightarrow b=2c\left(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\right)$.

Тогава $S=\frac{a+b}{2}h=c^2\left(2\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\right)\cos 15^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow S=c^2\left(2\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ\right)=c^2\left(1+\cos 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 30^\circ\right)=\frac{3+2\sqrt{3}}{4}c^2.$$