МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ" – СОФИЯ

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

29.07.2008 год.

ВАРИАНТ 2

Задача 1.

1.1. Решете уравнението:

$$5^{2x} - 6.5^x + 5 = 0.$$

РЕШЕНИЕ: Нека $5^x = u > 0 \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0, u > 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 5$.
Следователно решенията на показателното уравнение са: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

1.2. При какви стойности на реалния параметър m показателното уравнение

$$5^{2x} - 6.5^x + m = 0$$

има два различни реални корена?

РЕШЕНИЕ: Нека $5^x = u$. Тогава даденото показателно уравнение има два различни реални корена, когато квадратното уравнение $u^2 - 6u + m = 0$ има два различни положителни корена u_1 и u_2: $\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ u_1 + u_2 > 0 \\ u_1 u_2 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 9 - m > 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \end{array} \right.$.

Следователно $m \in (0, 9)$.

Задача 2. Намерете границата

$$\lim_{t \to 3} \left[\log_6 \frac{t-3}{\sqrt{t+6} - 3} \right].$$

РЕШЕНИЕ: $\lim\limits_{t \to 3} \left[\log_6 \frac{t-3}{\sqrt{t+6} - 3} \right] = \lim\limits_{t \to 3} \left[\log_6 \frac{(t-3)\left(\sqrt{t+6} + 3\right)}{\left(\sqrt{t+6}\right)^2 - 3^2} \right] = \lim\limits_{t \to 3} \left[\log_6 \left(\sqrt{t+6} + 3\right) \right]$.

Тъй като логаритмичната функция е непрекъсната, търсената граница е равна на $\log_6 \left[\lim\limits_{t \to 3} \left(\sqrt{t+6} + 3\right) \right] = \log_6 6 = 1$.

Задача 3. Дадена е функцията

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax - 4, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

където a е реален параметър.

3.1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$ при $a = 2$.

3.2. Да се намерят интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x)$ при $a = 2$.

math-bg.com

3.3. За кои стойности на параметъра a функцията $f(x)$ е строго растяща в цялото си дефиниционно множество?

РЕШЕНИЕ:

3.1. При $a=2$ получаваме $f(x)=x^3+2x^2-4x-4,\quad x\in(-\infty,\infty)$. Производната на тази функция е $f'(x)=3x^2+4x-4$ и се анулира при $x_1=-2$ и $x_2=\frac{2}{3}$.

$f''(x)=6x+4\Rightarrow f''(-2)=-8<0,\ f''\left(\frac{2}{3}\right)=4+4>0$. Следователно, при $x_1=-2$ функцията има локален максимум: $f(-2)=4$, а при $x_2=\frac{2}{3}$ – локален минимум: $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{148}{27}$.

3.2. Както в **3.1.**, намираме $f'(x)=3x^2+4x-4$ и определяме нейния знак в съответните интервали:

при $x\in(-\infty,-2)$: $f'(x)>0\Rightarrow\ f(x)$ е строго растяща в $(-\infty,-2)$;

при $x\in\left(-2,\frac{2}{3}\right)$: $f'(x)<0\Rightarrow\ f(x)$ е строго намаляваща в $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$;

при $x\in\left(\frac{2}{3},\infty\right)$: $f'(x)>0\Rightarrow\ f(x)$ е строго растяща в $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$.

(В частност, още веднъж:

при $x_1=-2$ функцията има локален максимум, а при $x_2=\frac{2}{3}$ – локален минимум.)

3.3. $f(x)$ е строго растяща в цялото си дефиниционно множество, когато нейната производна е положителна навсякъде. $f'(x)=3x^2+2ax-2a$.

Определяме стойностите на параметъра a, за които $3x^2+2ax-2a>0,\ \forall x$.

Последното квадратно неравенство е изпълнено за всяко x, когато дискриминантата D на квадратния тричлен е отрицателна.

Следователно $a^2-3.(-2a)=\frac{D}{4}<0$, т.е. $a(a+6)<0\Rightarrow a\in(-6,0)$.

При $a=-6$ получаваме функцията $f(x)=(x-2)^3+4$, която е растяща, при това – строго, в цялото си дефиниционно множество.

Аналогично, при $a=0$, съответната функция $f(x)=x^3-4$ е също строго растяща в цялото си дефиниционно множество.

Отг.: $a\in[-6,0]$.

Задача 4. Трапец с височина 1 см е вписан в окръжност. Ъгълът при голямата основа е α, а ъгълът между диагоналите срещу бедрото е φ. Да се намери дължината на радиуса на окръжността.

РЕШЕНИЕ: Бедрата AD и BC на дадения (равнобедрен!) трапец $ABCD$ са равни на хипотенузата на правоъгълен триъгълник, за който са дадени катет с дължина 1 см и срещулежащ на този катет ъгъл α. Следователно $AD=BC=\frac{1}{\sin\alpha}$ см.

Нека описаната около $ABCD$ окръжност е с център т. O и радиус R. Бедрата AD и BC отсичат от тази окръжност равни дъги с мярка φ (тъй като $\varphi=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{2}$).

Следователно централният ъгъл AOD (както и BOC) е φ.

math-bg.com

Тогава $R = OA = OD = \dfrac{AD}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\sin\alpha}$ см.

math-bg.com