МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

15.07.2008 год.

ВАРИАНТ 2

Задача 1.

1.1. Определете множеството от допустими стойности на променливата a и извършете означените действия:

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{4}{a+2}\right)\left(2+\frac{a^2+4}{a-2}\right).$$

РЕШЕНИЕ: ДМ: $a\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$;

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{4}{a+2}\right)\left(2+\frac{a^2+4}{a-2}\right)=\frac{(2a+4-4a)(2a-4+a^2+4)}{a(a+2)(a-2)}=\frac{2(2-a)(2+a)a}{a(a+2)(a-2)}=-2.$$

1.2. Да се намерят първият член и разликата на аритметична прогресия, за която

$$\begin{vmatrix} a_2+a_8=10 \\ a_3+a_{14}=31 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ: $\begin{vmatrix} (a_1+d)+(a_1+7d)=10 \\ (a_1+2d)+(a_1+13d)=31 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 2a_1+8d=10 \\ 2a_1+15d=31 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} a_1+4d=5 \\ 7d=21 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} a_1=-7 \\ d=3 \end{vmatrix}$, т.е.

прогресията е с първи член $a_1=-7$ и разлика $d=3$.

Задача 2. При какви стойности на реалния параметър k квадратното уравнение

$$x^2-6x-5(k+2)=0$$

има реални корени с различни знаци?

РЕШЕНИЕ: Уравнението има два корена $x_{1,2}$ с различни знаци, когато:

$-5(k+2)<0\Rightarrow k+2>0\Rightarrow k>-2$.

Отг. $k\in(-2,\infty)$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, $x\in(-\infty,\infty)$, където:

3.1. $a_0=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{2t^3-3t^2+t-2}{t^4+1}$;

3.2. a_1 е коренът на уравнението $\sqrt{2y-1}-3+\sqrt{5y-1}=0$;

3.3. a_2, a_3 са решения на системата $\begin{vmatrix} a_2^2+a_3^2=10 \\ 2a_2+a_3=5 \\ a_2a_3<0 \end{vmatrix}$.

3.4. При намерените стойности на a_0,a_1,a_2,a_3 да се определят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

РЕШЕНИЕ:

math-bg.com

3.1. $a_0 = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{2t^3-3t^2+t-2}{t^4+1} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{2/t-3/t^2+1/t^3-2/t^4}{1+1/t^4} = \dfrac{0}{1} = 0$;

3.2. $\sqrt{2y-1}-3+\sqrt{5y-1}=0$

ДМ: $y\in\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$. От $\sqrt{2y-1}-3+\sqrt{5y-1}=0$ получаваме еквивалентното уравнение:

$\sqrt{2y-1}+\sqrt{5y-1}=3 \Rightarrow 2y-1+5y-1+2\sqrt{2y-1}\sqrt{5y-1}=9$, откъдето

$2\sqrt{2y-1}\sqrt{5y-1}=11-7y$. При $y>\dfrac{11}{7}$ последното уравнение няма решение.

При $y\le\dfrac{11}{7}$ продължаваме:

$4(2y-1)(5y-1)=(11-7y)^2 \Rightarrow 4(10y^2-7y+1)-(121-154y+49y^2)=0$, следователно

$9(y^2-14y+13)=0$.

Корените на последното квадратно уравнение са 1 и 13, $13>\dfrac{11}{7}$. Следователно търсеният корен на разглежданото ирационално уравнение е 1, т.е. $a_1=1$;

3.3. $\left|\begin{array}{l} a_2^2+a_3^2=10 \\ 2a_2+a_3=5 \Rightarrow \\ a_2a_3<0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} (5-2a_2)^2+a_2^2=10 \\ a_3=5-2a_2 \\ a_2a_3<0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 5a_2^2-20a_2+15=0 \\ a_3=5-2a_2 \\ a_2(5-2a_2)<0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_2^2-4a_2+3=0 \\ a_3=5-2a_2 \\ a_2(a_2-5/2)>0 \end{array}\right|$.

Корените на първото (квадратно) уравнение на последната система са 1 и 3. Следователно $a_2=3, a_3=-1$.

3.4. $f(x)=0.x^3+x^2+3x-1=x^2+3x-1$. Получената функция има единствен локален екстремум – минимум при $x=-\dfrac{3}{2}$:

$$f(x)=x^2+3x-1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-1-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4},\ f_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{13}{4}.$$

Задача 4. Основите на равнобедрен трапец са с дължини 40 см и 28 см, а дължината на бедрото му е 12 см. Да се намерят:

4.1. ъглите на трапеца;

4.2. дължината на описаната около трапеца окръжност.

РЕШЕНИЕ:

4.1. Нека трапецът е $ABCD$ с основи $AB=40$, $CD=28$ и бедра $BC=AD=12$ (в см). Тогава за острите ъгли $\alpha=\beta$ при голямата основа получаваме

$$\cos\alpha=\frac{AB-CD}{2BC}=\frac{40-28}{24}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}.$$

Съответно, ъглите при малката основа на трапеца са равни на $\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.2. Описаната около $ABCD$ окръжност е описана и около триъгълника ABC, който е със страни (в см): $AB=40$, $BC=12$ и

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB.BC\cos\alpha}=\sqrt{40^2+12^2-40.12}=4\sqrt{100+9-30}=4\sqrt{79}$.

Тогава, от синусовата теорема за триъгълник ABC намираме радиуса R на описаната окръжност: $R=\dfrac{AC}{2\sin\beta}=\dfrac{4\sqrt{79}}{\sqrt{3}}$ см, както и нейната дължина – $2\pi R=8\pi\sqrt{\dfrac{79}{3}}$ см.

math-bg.com