<u>МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ ИВАН РИЛСКИ” – СОФИЯ</u>

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

10.05.2008 год.

ВАРИАНТ 2

Задача 1.

1.1. Решете уравнението, като предварително определите множеството от допустими стойности на неизвестното x :

$$\frac{3}{4-x} - \frac{5}{4+x} + \frac{6x+4}{x^2-16} = 0 .$$

РЕШЕНИЕ: Множеството от допустими стойности е $M = (-\infty,-4)\cup(-4,4)\cup(4,\infty)$. За такива стойности на x получаваме:

$$3(4+x)-5(4-x)-(6x+4) = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \in M .$$

1.2. Решете системата $\left|\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{array}\right.$.

РЕШЕНИЕ: $\left|\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3x = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2.3 + y = 5 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$, отг.: $(3,-1)$.

1.3. При какви реални стойности на b системата $\left|\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - y = b \end{array}\right.$ има единствено решение?

РЕШЕНИЕ:

$\left|\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - y = b \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3x = 5 + b \end{array}\right. \Rightarrow$ системата има единствено решение при всяка реална стойност

на b (което, при фиксирана стойност на b , е наредената двойка $\left(\frac{5+b}{3},\frac{5-2b}{3}\right)$).

Задача 2. Решете уравненията:

2.1. $\sqrt{y+5} + 1 = y$ **.**

РЕШЕНИЕ: Множеството от допустими стойности на y е $[-5,\infty)$.

Тъй като от $\sqrt{y+5} + 1 = y \Rightarrow \sqrt{y+5} = y - 1$, при $y \in [-5,1)$ уравнението няма решение. Търсим решение на последното уравнение в интервала $[1,\infty)$. От $\left(\sqrt{y+5}\right)^2 = (y-1)^2$ $\Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0,\ y \geq 1 \Rightarrow y_1 = -1 < 1,\ y_2 = 4 \Rightarrow y = 4$ е търсеното решение.

2.2. $7^{2x-1} + 7^{2x-2} - 7^{2x-3} = 385$ **.**

РЕШЕНИЕ: $7^{2x-1} + 7^{2x-2} - 7^{2x-3} = 385 \Rightarrow 7^{2x-3}\left(7^2 + 7 - 1\right) = 385 \Rightarrow 7^{2x-3} = \frac{385}{55} \Rightarrow 7^{2x-3} = 7$.

Тогава получаваме $2x-3=1 \Rightarrow x=2$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=\frac{x^3}{3}+ax^2-3x+b+2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят:

3.1. координатите на точките, в които допирателните към графиката на функцията са успоредни на абсцисната ос Ox, когато $a=-1,\ b=2$.

РЕШЕНИЕ: Дадената функция (полином от 3-та степен) е дефинирана и диференцируема в цялото множество $(-\infty\ ,\infty\ )$. Допирателните към графиката на $f(x)$, вкл. и в случая $a=-1,\ b=2$, са успоредни на абсцисната ос, когато първите координати на допирните точки са корени на нейната производна, т.е. – на уравнението $f'(x)=0$,

$$f'(x)=x^2+2ax-3.$$

При $a=-1$ получаваме уравнението: $x^2-2x-3=0$, чиито корени са $x_1=-1$ и $x_2=3$.
Вторите координати на търсените точки са съответно:

$$y_1=f(x_1)=-\frac{1}{3}-1+3+2+2=\frac{17}{3} \text{ и } y_2=f(x_2)=9-9-9+2+2=-5.$$

3.2. стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $f(x)=0$ има само един реален корен, когато $b=-2$.

РЕШЕНИЕ: При $b=-2$ разглеждаме уравнението $\frac{x^3}{3}+ax^2-3x-2+2=0$, т.е.

$$\frac{x^3}{3}+ax^2-3x=0;$$

Тъй като $\frac{x^3}{3}+ax^2-3x=\frac{x}{3}\left(x^2+3ax-9\right),\ x=0$ е корен на уравнението.

Квадратният тричлен (в скобите) има дискриминанта $D=9a^2+36>0, \forall a\in(-\infty,\infty)$.
Следователно разглежданото уравнение винаги има три (различни) реални корена, т.е. не съществува реална стойност на параметъра a, за която уравнението да има само един реален корен.

3.3. стойностите на реалния параметър b, за които уравнението $f(x)=0$ има само един реален корен, когато $a=1$.

РЕШЕНИЕ: При $a=1$ разглеждаме уравнението $\frac{x^3}{3}+x^2-3x+b+2=0$.

Лявата страна на това уравнение е полиномът от 3-та степен

$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+b+2$, чиято производна е $f'(x)=x^2+2x-3$.

Имаме $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty,\quad f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, $f'(x)=(x-1)(x+3)$.

Следователно функцията $f(x)$ има винаги поне един реален корен. Тя е строго растяща в $(-\infty\ ,-3)$, строго намаляваща в $(-3,1)$ и строго растяща в $(1,\infty\ )$, откъдето следва, че реалният корен ще бъде единствен, когато стойностите на локалния минимум и на локалния максимум на $f(x)$ са или едновременно положителни, или едновременно отрицателни числа.

$$f_{\min}=f(1)=\frac{1}{3}+1-3+b+2=b+\frac{1}{3};$$

$$f_{\max}=f(-3)=-9+9+9+b+2=b+11.$$

Следователно $\left(b+\frac{1}{3}\right)(b+11)>0\Rightarrow b\in(-\infty,-11)\cup\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$.

Задача 4. Даден е успоредник *ABCD*.

4.1. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако периметърът му е 30 см, големият му диагонал е с дължина 13 см, а острият му ъгъл е 60^0.

РЕШЕНИЕ: Означаваме $AB = a, BC = b$. Тогава $a + b = 15$. Нека ъгъл *BAD* е остър, т.е. $\angle BAD = 60^\circ$. Тогава големият диагонал на успоредника е $AC = 13$ см.
Използвайки косинусовата теорема за триъгълника *ABC* получаваме:
$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 13^2$, откъдето
$(a + b)^2 - ab = 13^2 \Rightarrow ab = 15^2 - 13^2 = 2.28 = 56.$
Тогава числата a и b са корените (t_1 и t_2) на квадратното уравнение
$t^2 - 15t + 56 = 0,\ t_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2}$. Следователно страните на успоредника *ABCD* са с дължини: $AB = CD = 7$ см, $BC = DA = 8$ см, или $AB = CD = 8$ см, $BC = DA = 7$ см.

4.2. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако диагоналът *BD* е равен на страната *AB* и около триъгълника *ABD* е описана окръжност, която дели диагонала *AC* на отсечки с дължини 65 см и 16 см.

РЕШЕНИЕ: Означаваме $AB = a, BC = b$, $\angle BAD = \alpha$. Означаваме с M пресечната точка на описаната около триъгълника ABD окръжност с диагонала *AC*.

По условие $AM = 65$ см, $CM = 16$ см (тъй като $AM > \frac{1}{2}AC$), $BD = a = CD$.

Следователно $\angle BCD = \angle CBD = \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Центърът на описаната около равнобедрения триъгълник ABD окръжност лежи на симетралата на основата AD, която е и ъглополовяща на $\angle ABD$, равен на $\pi - 2\alpha$.
Тогава симетралата на AD и правата BC сключват ъгъл, равен на $\dfrac{\pi - 2\alpha}{2} + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$, откъдето следва, че върхът B е допирна точка на правата BC и описаната окръжност. В частност, $CB^2 = CM.CA$, откъдето получаваме $b^2 = 16(16 + 65) = 4^2.9^2 \Rightarrow AD = BC = b = 36$ см.
От равнобедрения триъгълник ABD: $b = 2a\cos\alpha$, а от косинусовата теорема за триъгълник ABC следва: $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.
Следователно $(16 + 65)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + 2b^2 \Rightarrow a^2 = 81^2 - 2b^2$,
или $a = 9\sqrt{81 - 32} = 9.7$, т.е. $AB = CD = 63$ см.

Задачата може да се реши и директно:

Означаваме средата на AC с O. Тогава $AO.OM = BO.OD \Rightarrow \dfrac{AC}{2} \cdot \left(\dfrac{AC}{2} - CM\right) = \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2$,

откъдето получаваме $BD^2 = 81.49 = (9.7)^2 \Rightarrow a = BD = 63$ см.

От $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$ намираме и $b^2 = \dfrac{81^2 - 63^2}{2} = 3^2.12^2 \Rightarrow AD = BC = b = 36$ см.