Минно-геоложки Университет "Свети Иван Рилски"

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

26.07.2007 г.

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Дадена е системата $\begin{vmatrix} x+2y=q \\ x^2+y^2=4 \end{vmatrix}$, където q е реален параметър.

1.1. Решете системата при $q = 0$.

РЕШЕНИЕ: $\begin{vmatrix} x+2y=0 \\ x^2+y^2=4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=-2y \\ (-2y)^2+y^2=4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=-2y \\ 5y^2=4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=-2y \\ y_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_{1,2}=\mp\frac{4}{\sqrt{5}} \\ y_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$.

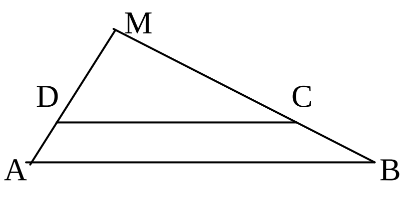
Отг.: $\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

1.2. За кои стойности на параметъра q системата има две реални различни решения?

РЕШЕНИЕ: Системата има две реални различни решения, когато дискриминантата на полученото, след заместване на x, квадратно уравнение за y (например) е положителна, т.е., когато $0<\frac{D}{4}=q^2-5.(q^2-4)=20-q^2 \Rightarrow q^2<20 \Rightarrow q \in \left(-2\sqrt{5},\, 2\sqrt{5}\right)$.

Задача 2. Един от ъглите на трапец е 30^0. Продълженията на бедрата на трапеца се пресичат под прав ъгъл. Едната основа на трапеца е 8 см, а средната му отсечка е 10 см. Намерете по-малкото бедро на трапеца.

РЕШЕНИЕ:



Означаваме дадения трапец с $ABCD$, а пресечната точка на продълженията на бедрата му с M.

$\angle ABM = \angle DCM = 30^\circ$, $CD = 8$ см.

$\frac{AB+CD}{2} = 10$ см. Следователно $AB = 12$ см.

DM и AM са катети, лежащи срещу ъгъл 30^0, съответно в правоъгълните триъгълници ABM и DCM. Тогава $DM = 4$ см, $AM = 6$ см и следователно по-малкото бедро на трапеца е $AD = AM - DM = 2$ см.

Задача 3. Дадена е функцията $g(x) = px^2-(p-1)x-2p+1$, където $p \neq 0$ е реален параметър. Намерете:

3.1. при какви стойности на параметъра p произведението от корените на уравнението $g(x)=0$ е равно на 3;

РЕШЕНИЕ: $g(x)=px^2-(p-1)x-2p+1$. ДМ: $x\in(-\infty,\infty)$.

Корените на $g(x)=0$ принадлежат на дефиниционното множество на $g(x)$, когато дискриминантата $D\geq 0$.

$D=(p-1)^2-4p(1-2p)=(p-1)^2+4p(p-1)+(2p)^2=(3p-1)^2\geq 0,\forall p$. Следователно квадратното ($p\neq 0$ по условие) уравнение $g(x)=0$ винаги има два реални корена:

$x_1=-1$ и $x_2=\dfrac{2p-1}{p}$,

чието произведение, като функция на параметъра p, е функцията

$f(p)=\dfrac{1-2p}{p}$, $p\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. $f(p)=3\Rightarrow 1-2p=3p\Rightarrow p=\dfrac{1}{5}$.

3.2. стойностите на параметъра p така, че допирателната към графиката на функцията $g(x)$ в точката с абсциса $x_1=1$ да сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл с мярка 45^0;

РЕШЕНИЕ: Означаваме с α ъгъла, който допирателната към графиката на $g(x)$ в точката с абсциса $x_0=1$ сключва с абсцисната ос.

Тогава $tg\alpha=g'(x_0)=g'(1)$, където $g'(x)=2px-(p-1), \alpha=45^\circ$.

Следователно $1=tg45^\circ=2p-(p-1)\Rightarrow p+1=1\Rightarrow p=0$.

Но по условие $p\neq 0$, следователно множеството от търсени стойности на p е празното.

3.3. лицето на триъгълника, ограничен от координатните оси и допирателната към графиката на функцията $g(x)$ в точката с абсциса $x_2=-1$, когато $p=1$.

При $p=1$ разглеждаме функцията $g(x)=g(x)\big|_{p=1}=1.x^2-(1-1)x-2.1+1=x^2-1$.

Означаваме допирателната към нейната графика в точката с абсциса $x_2=-1$ с t, а пресечните точки на t с координатните оси Ox и Oy - съответно с A и B ($O=Ox\cap Oy$ е началото на координатната система). Тъй като $g(-1)=0$, точката A е и допирната точка на t и графиката на $g(x)$.

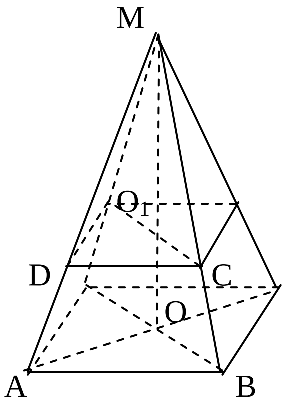
Трябва да намерим лицето на правоъгълния ΔAOB: $S=S_{ABC}=\dfrac{OA.OB}{2}$, $OA=1$.

Означаваме с γ ъгъла между Ox и t. Тогава $tg\gamma=g'(-1)$; $g'(x)=2x\Rightarrow tg\gamma=2.(-1)=-2$. Координатите на произволна точка от t удовлетворяват уравнението: $y=-2x-2$.

$\angle OAB=\pi-\gamma$ и $\dfrac{OB}{OA}=tg(\pi-\gamma)=2$.

Следователно $OB=2OA=2$ и $S=\dfrac{1.2}{2}=1$.

Задача 4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 6 см и височина 4 см. Прекарана е равнина, успоредна на основата, на разстояние 1 см от нея. Намерете околната повърхнина на получената пресечена пирамида.



РЕШЕНИЕ: Околната повърхнина на получената пресечена пирамида е $S = 4S_{ABCD}$, където $ABCD$ е равнобедрен трапец с голяма основа AB, равна на основния ръб на дадената пирамида ($AB = 6$ см), и малка основа CD - сечението на прекараната равнина със стената ABM. Означаваме с OM дадената височина ($OM = 4$ см) и с O_1 пресечната точка на тази равнина с OM $\Rightarrow OO_1 = 1$см. Триъгълниците BOM и CO_1M са подобни правоъгълни триъгълници. Следователно

$\dfrac{CO_1}{BO} = \dfrac{CM}{BM} = \dfrac{O_1M}{OM} = \dfrac{4-1}{4}$, откъдето получаваме

$CO_1 = \dfrac{3}{4}BO \Rightarrow CO_1\sqrt{2} = \dfrac{3}{4}BO\sqrt{2}$, т.е. $CD = \dfrac{3}{4}AB$;

$BC = BM - CM = BM - \dfrac{3}{4}BM = \dfrac{1}{4}BM$.

$BM = \sqrt{BO^2 + OM^2} = \sqrt{\dfrac{AB^2}{2} + OM^2} = \sqrt{34}$ см.

Означаваме с h височината на трапеца $ABCD$.

Тогава $h = \sqrt{BC^2 - \left(\dfrac{AB-CD}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{BM}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{AB}{8}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{BM^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{4}$ см и за търсената околна повърхнина получаваме, както следва:

$S = 4\cdot\dfrac{AB+CD}{2}\cdot h = \dfrac{7AB}{2}\sqrt{BM^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \dfrac{7.6}{2}\cdot\dfrac{5}{4} = \dfrac{3.5.7}{4} = \dfrac{105}{4}$ см^2.