Минно-геоложки Университет "Св. Иван Рилски"

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

14.05.2007 г.

ВАРИАНТ 3

ЗАДАЧА 1.

1.1. Решете уравнението $\sqrt{7x+5}=t$, като предварително определите множеството от допустими стойности на реалния параметър t.

РЕШЕНИЕ: ДО: $t \geq 0$; ДМ: $7x+5 \geq 0$; $7x+5=t^2 \Rightarrow x=\dfrac{t^2-5}{7}, \quad t \geq 0$.

1.2. За кои стойности на реалния параметър m уравнението $x^2+(m-1)x+m+2=0$ има равни корени?

РЕШЕНИЕ:

I. $x^2+(m-1)x+m+2=0 \Rightarrow \left(x+\dfrac{m-1}{2}\right)^2+(m+2)-\left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2=0$

$\Rightarrow x_1=x_2=-\dfrac{m-1}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2-(m+2)=0$

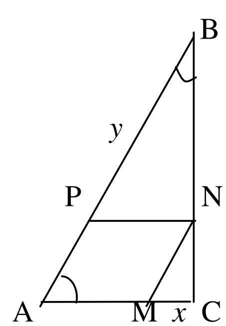
$\Rightarrow m^2-2m+1-4m-8=0 \Rightarrow m^2-6m-7=0$

$\Rightarrow m_1=-1, \quad m_2=7$.

II. $D=(m-1)^2-4(m+2)=0 \Leftrightarrow m^2-6m-7=0, \quad m_1=-1, \quad m_2=7$.

ЗАДАЧА 2. Даден е правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 60°. В него е вписан ромб, с дължина на страната 6 см, по такъв начин, че ъгълът от 60° е общ. Всички върхове на ромба лежат на страните на триъгълника. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

РЕШЕНИЕ:



$AM=MN=NP=BA=a=6$ см

$\angle CAB=60^\circ$.

$AB=c$; $AC=\dfrac{c}{2}$; $BC=\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$;

Нека $MC=x$; $PB=y$.

$\Delta ACB \sim \Delta PNB \Rightarrow \dfrac{a+x}{a}=\dfrac{a+y}{y}$

$\Rightarrow 1+\dfrac{x}{a}=1+\dfrac{a}{y} \Rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{y} \Rightarrow xy=a^2$.

$$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{c}{2}-a \\ y=c-a \end{array}\right. \Rightarrow \left(\dfrac{c}{2}-a\right)(c-a)=a^2 \Rightarrow \dfrac{c^2}{2}-\dfrac{3}{2}ac=0, c>0 \Rightarrow c=3a=18 \text{ см.}$$

Отг.: $AB=18$ см; $AC=9$ см; $BC=9\sqrt{3}$ см.

ЗАДАЧА 3. Дадена е функцията $h(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}$.

3.1. Намерете най-малката и най-голямата стойност на $h(x)$ при $x\in[-3;2]$.

РЕШЕНИЕ: $h(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}$; $x\in[-3;2]$

$h'(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}=\frac{3x^2+6x+2}{6}$. Корените на уравнението $h'(x)=0$ са

$$x_1=-1-\frac{1}{\sqrt{3}},\, x_2=-1+\frac{1}{\sqrt{3}};\; -3<-1-\frac{1}{\sqrt{3}}<-1+\frac{1}{\sqrt{3}}<2.$$

Функцията $h(x)$ е строго растяща в интервала $[-3, x_1]$, строго намаляваща в $[x_1, x_2]$ и строго растяща в $[x_2, 2]$. Следователно при $x=x_1$ $h(x)$ има локален максимум, а при $x=x_2$ - локален минимум, съответно $h(x_1)=\frac{1}{9\sqrt{3}}$; $h(x_2)=-\frac{1}{9\sqrt{3}}$.

$h(2)=4\Rightarrow \max\{h(x):-3\le x\le 2\}=h(2)=4$;

$h(-3)=-1\Rightarrow \min\{h(x):-3\le x\le 2\}=h(-3)=-1$.

3.2. Покажете, че стойностите на $h(n)$ са цели положителни числа при цели положителни стойности на аргумента n.

РЕШЕНИЕ: $h(n)=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, $n=1, 2, 3,...$

Произведението на всеки две последователни естествени числа винаги е четно, а произведението на всеки три последователни естествени числа винаги се дели на 3, в частност и на 6. Следователно $h(n)$ е естествено (цяло положително) число.

3.3. Решете уравнението $h\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)=0$.

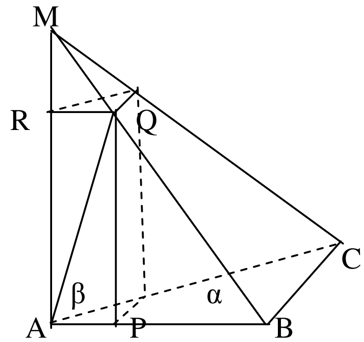
РЕШЕНИЕ: $h\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)=h(\cos y)=\frac{\cos y(\cos y+1)(\cos y+2)}{6}$.

Решението на даденото тригонометрично уравнение е обединението от решенията на уравненията: $\cos y=0$ и $\cos y=-1$ (третият множител в числителя е винаги положителен!). Следователно търсеното решение е множеството:

$$\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}: k=0,\pm1,\pm2,...\right\}\cup\{(2l+1)\pi: l=0,\pm1,\pm2,...\}.$$

ЗАДАЧА 4. Основата на пирамида е равностранен триъгълник. Един от околните ръбове на пирамидата е перпендикулярен на основата и е с дължина l. Другите два околни ръба на пирамидата сключват с основата ъгъл α. В пирамидата е вписана права триъгълна призма по следния начин: три нейни върха лежат на околните ръбове на пирамидата, а другите три – на основата на пирамидата. Диагоналът на околната стена на призмата сключва с равнината на основата ъгъл β. Да се намери височината на призмата.

РЕШЕНИЕ:



Околният ръб MA е перпендикулярен на основата ABC (по условие), следователно околните стени MAB и MAC са еднакви правоъгълни триъгълници. Околните ръбове MB и MC сключват с равнината на основата ъгъл α, в частност $\angle$ABM $=\angle$ACM= α.

Сечението на вписаната призма с околната стена ABM е правоъгълникът APQR, чийто диагонал AQ сключва с равнината ABC ъгъл β, в частност $\angle$BAQ=β.

Нека AR=*h*.

От подобието на триъгълниците ABM и RQM следва

$$\frac{l-h}{l}=\frac{RQ}{AB};\ \ RQ=\frac{h}{tg\beta};\ AB=\frac{l}{tg\alpha}.$$

Следователно $1-\frac{h}{l}=\frac{h}{l}\cdot\frac{tg\alpha}{tg\beta}\Rightarrow\frac{h}{l}=\frac{tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=\frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, т.е. $h=l\frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.