

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЧАСТ ОТ ЗАДАЧИТЕ

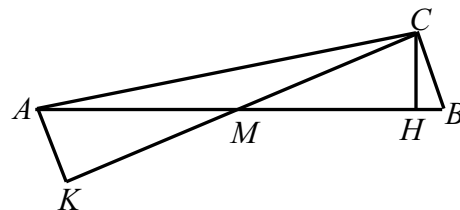
27. Асен отишъл на гости при своя приятел Васил от 11-ия етаж на жилищния блок, в който живеят и двамата. Когато решил да се прибира, той тръгнал нагоре по стълбите вместо надолу към своя етаж. Стигнал до последния етаж на блока и забелязвайки, че се е объркал, тръгнал обратно за дома си. По този начин Асен изминал 1,4 пъти по-голямо разстояние от необходимото да се прибере направо у дома. Колко етажен е жилищният блок на Асен и Васил, ако 5-ият, 6-ият и 7-ият етаж в него са отделени за административни помещения и на тези етажи няма живущи?

А) 12 Б) 13 В) 14 Г) повече от 14

Отг. Б). Ако Асен живее x етажа по-надолу от Васил, той е изминал разстоянието между $1,4x$ етажа, за да се прибере у дома. Тогава разстоянието между 11-ия и последния етаж на блока е $\frac{1,4x-x}{2} = 0,2x = \frac{x}{5}$ етажа. Тъй като $\frac{x}{5}$ е цяло число, то една от възможностите е $\frac{x}{5} = 1$, откъдето $x = 5$. Това означава, че Асен живее на 6-ия етаж, което е невъзможно, защото по условие на този етаж се намират административни помещения. Ако $\frac{x}{5} = 2$, то $x = 10$. Следователно блокът е 13-етажен и Асен живее на първия етаж. Ако $\frac{x}{5} \geq 3$, то $x \geq 15$, което е невъзможно, защото преди 11-ия етаж няма толкова много етажи (повече от 15). Единствената възможност е блокът да е 13-етажен.

28. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$), в който $AC > BC$. Ако дължината на височината към хипотенузата AB е 6 см и M е средата на AB , то дължината в сантиметри на височината в $\triangle AMC$ от върха A е равна на:

Решение: **Отг. 6 см).** Нека $H \in AB$ и $K \in CM$ са петите на височините от върховете C и A съответно в триъгълниците ABC и AMC . Тъй като медианата към хипотенузата в правоъгълния триъгълник е половината от хипотенузата, то $AM = CM$. Тогава $\triangle AMK \cong \triangle CMH$ по II признак и $AK = CH = 6$ см.



30. Иванчо живее в 10-етажна сграда. Асансьорът в сградата се движи с една и съща постоянна скорост нагоре и надолу. Иванчо слиза с него за 20 сек. от етаж, на който живее, а се качва за 24 сек., защото не успява да стигне бутона на своя етаж и слизайки на по-долен етаж, изминава оставащото разстояние по стълбите до вкъщи с 2 пъти по-малка скорост от тази на асансьора. На кой етаж живее Иванчо?

А) осми

Б) седми

В) шести

Г) пети

Решение: **Отг. В).** Нека x е разстоянието между няколко етаж, което асансьорът минава за време, два пъти по-малко, отколкото времето, за което Иванчо преодолява по стълбите пеша след като слезе от асансьора. От друга страна времето пеша е с $24 - 20 = 4$ сек. повече, отколкото времето t на асансьора за разстоянието x . Следователно за времето пеша на Иванчо е вярно равенството $t + 4 = 2t$. От където намираме че времето на асансьора $t = 4$ сек. за разстоянието x . Тъй като за слизане с асансьора са необходими 20 сек., а 4 сек. са $\frac{1}{5}$ от 20 сек., то x е $\frac{1}{5}$ от разстоянието от дома на Иванчо до първия етаж. Ако тази $\frac{1}{5}$ част е 2 или повече етаж в сградата, то между I етаж и етаж, на който живее Иванчо, би имало 10 или повече етажи. Но това е невъзможно, защото сградата е 10-етажна. Заключаваме, че тази $\frac{1}{5}$ част е точно разстоянието между два съседни етаж. Това означава, че с асансьора Иванчо слиза на петия етаж ($4 \cdot 4 = 16$ сек.) и продължава пеш един етаж нагоре (8 сек.). Така установяваме, че Иванчо живее на шестия етаж.

Задачата може да се реши и само като се съобрази кои са делителите на 20 и се отчете, че разстоянията между етажите са с 1 по малко от броя на етажите.

32. Средноаритметичното на годините на майката, бащата и трите деца в едно семейство е 21 години, а средноаритметичното на годините на трите деца е 11 години. На колко години е бащата, ако той е с 4 години по-възрастен от майката?

Решение: **Отг. Г).** Сборът от годините на децата е $3 \cdot 11 = 33$. Ако означим с x годините на бащата, то майката е на $x - 4$ години и от условието получаваме $\frac{x + (x - 4) + 33}{5} = 21$.

Оттук $x = 38$ години.

33. Всяка от отсечките $a = 5 \text{ dm}$, $b = 7 \text{ dm}$ и $c = 9 \text{ dm}$ е страна или височина на даден успоредник. Възможно най-голямото лице на успоредника в квадратни дециметри е:

А) 21

Б) 35

В) 45

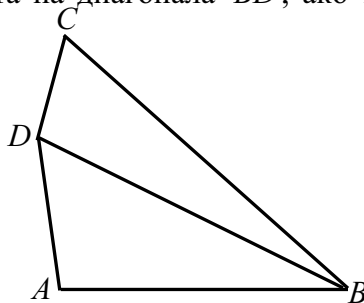
Г) 63

Решение: **Отг. Г)** Ако допуснем, че две от отсечките са страни, то най-голямо лице може да се получи при страна 9 дм. и височина към нея 5 дм. Ако допуснем, че две от отсечките са височини 7 дм. и 5 дм., то най-голямо лице може да се получи при страна 9 дм. и височина към нея 7 дм. Ако височините са 9 дм. и 5 дм., то отново възможно най-голямото лице е 63 кв.дм. при страна 7 дм., към която е спусната височина от 9 дм. Т. е. възможно най-голямото лице на успоредника се получава от $9 \cdot 7 = 63$. Верният отговор е Г).

34. На един остров живеят рицари, които винаги казват истината, и лъжци, които винаги лъжат. Част от жителите твърдят, че броят на рицарите на острова е четно число, а останалите твърдят, че броят на лъжците на острова е нечетно число. Кое от посочените числа **НЕ** може да е броят на жителите на този остров?

Решение: **Отг. Б).** Ако двама от жителите изказват едно и също твърдение, то двамата са едновременно рицари или лъжци. Оттук следва, че са възможни два случая: първото твърдение да е изказано от рицарите на острова, а второто – от лъжците или първото твърдение да е изказано от лъжците на острова, а второто – от рицарите. В първия случай броят на рицарите е четно число и броят на лъжците е също четно число. Във втория случай броят на рицарите е нечетно число и броят на лъжците е също нечетно число. Общият брой на жителите и в двата случая е четно число (четно + четно = четно и нечетно + нечетно = четно). От посочените числа само числото **35 в Б)** е нечетно.

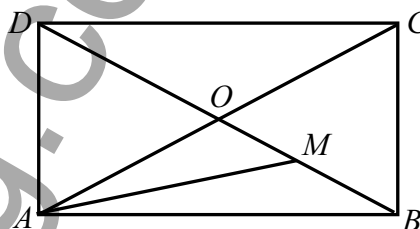
35. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 8 \text{ см}$, $BC = 16 \text{ см}$, $CD = 4 \text{ см}$ и $AD = 6 \text{ см}$. Намерете дължината на диагонала BD , ако тя е цяло число сантиметри.



Решение: **Отг. 13 см.** От неравенството на триъгълника за $\triangle ABD$ следва, че $BD < 14$ см, а от същото неравенство за $\triangle DBC$ – съответно, че $BD > 12$ см. Единственото цяло число между 12 и 14 е 13, откъдето заключаваме, че $BD = 13$ см.

36. Г) От условието следва, че карамфилите и лалетата са съответно на лехи с номера 2 и 4. Нека карамфилите са на леха 2, а лалетата са на леха 4. Тъй като карамфилите са единствения съсед на герберите, то герберите са в леха с номер 1. Розите не бива да са до карамфилите и следователно са в леха с номер 5. За хризантемите остава леха с номер 3. Ако лалетата са в леха с номер 2, а карамфилите са в леха с номер 4, то те могат да са единствен съсед на герберите, ако герберите са в леха с номер 5. До карамфилите не са розите и тогава розите са в леха 1. За хризантемите отново остава леха номер 3.

38. Диагоналите на правоъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O . Ако точката M е средата на отсечката BO , то колко процента е лицето на $\triangle AMO$ от лицето на правоъгълника?

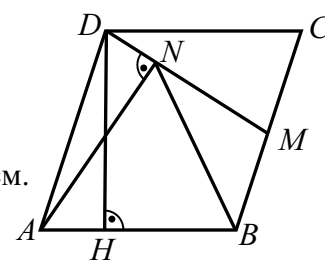


Решение: **Отг. А).** Ще използваме, че медианата в един триъгълник разделя триъгълника на два равнолицеви триъгълника. Тъй като AM е медиана в $\triangle ABO$ и BO

е медиана в $\triangle ABC$, то $S_{AMO} = \frac{1}{2}S_{ABO} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$. Тогава $\frac{S_{AMO}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8} = 12,5\%$.

40. Даден е успоредник $ABCD$ с височина $DH = 6$ см ($H \in AB$).

Нека M е средата на страната BC и $AN \perp DM$ ($N \in DM$). Да се намери лицето на успоредника в квадратни сантиметри, ако $BN = 4,4$ см.



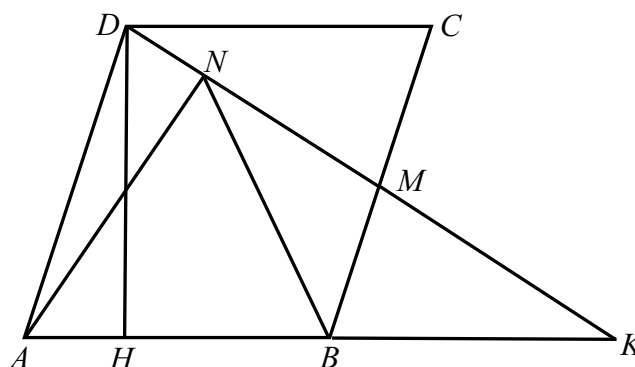
А) 26,4

Б) 22,4

В) 18,8

Г) 16,4

Решение:



Нека K е пресечната точка на правите AB и DM . Тъй като триъгълниците DMC и KMB са еднакви по II признак, то $BK = CD = AB$. Следователно NB е медиана в правоъгълния $\triangle AKN$ и $AB = BN = 4,4$ см, откъдето $S_{ABCD} = AB \cdot DH = 4,4 \cdot 6 = 26,4$ кв. см.

41. В една област има 3 града: А, Б и В. Жителите на А винаги казват истината, жителите на Б винаги лъжат, а жителите на В – ако веднъж са излъгали, следващия път задължително казват истината, а ако са казали истината, следващия път задължително лъжат. В един от градовете избухнал пожар и жител от областта провел следния разговор с дежурния на единствената пожарна:

- В нашия град има пожар!
- Къде е пожарът?
- В град В.

За кой от градовете трябвало да се отпрати пожарната?

- А) А Б) Б В) В Г) не може да се определи

Решение: Отг.А) Жителят, който се обадил за пожара изказал 2 твърдения « В нашия град има пожар» и « Пожарът е в град В». Обадилият се не е жител на А, защото двете твърдения са противоречиви. Той не може да е и жител на В, защото двете твърдения са верни, а това противоречи на условието. Ако сигнализиралият за пожара е жител на Б, то от първото твърдение следва, че пожарът не е във град Б, а от второто твърдение следва, че и в град В няма пожар. Следователно единствено възможно е обаждането да е от жител на град Б и пожарът да е в град А.

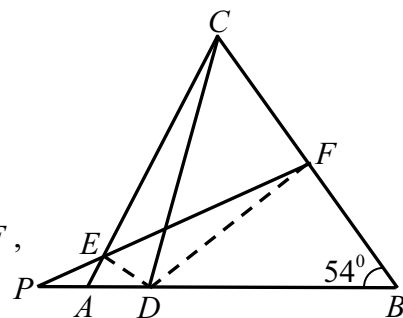
42. В парламентарни избори на една държава участвали всички пълнолетни граждани, които са гласували за регистрираните партии. Гласувалите за партията на математиците обичат математиката, а 80% от гласувалите за останалите партии не обичат математиката. Най-малко колко процента са гласували за партията на математиците, ако точно 52% от пълнолетните жители на тази държава обичат математиката?

- А) 35% Б) 52% В) 42% Г) 40%

Решение: Отг.Г) Ако означим с P броя на пълнолетните жители, а с M – броя на гласувалите за партията на математиците, то гласувалите за останалите партии са $P - M$. Тези, които обичат математиката са $0,52P$, а тези, които не обичат математиката са $0,48P$. От неравенството $0,8(P - M) \geq 0,48P$ намираме, че $\frac{M}{P} \geq \frac{2}{5}$.

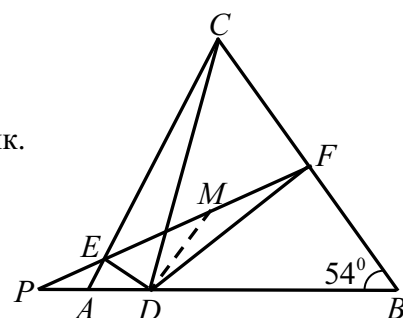
Това означава, че партията на математиците е събрала най-малко $\frac{2}{5} \cdot 100 = 40\%$ от всички гласове.

43. Даден е $\triangle ABC$, в който $AB > AC$ и $\angle ABC = 54^\circ$. Точката D е от страната AB така, че $CD = BD$, а ъглополовящите на ъглите ADC и BDC пресичат страните AC и BC съответно в точките E и F . Ако правата EF пресича правата AB в точка P и $2PD = EF$, да се намери градусната мярка на $\angle PED$.



Решение: **Отг. Б)** Тъй като DF е ъглополовяща в равнобедрения $\triangle CBD$ ($CD = BD$ по условие), то DF е и височина в този триъгълник.

Заклучаваме, че $\angle DFB = 90^\circ$. Освен това $\angle EDF = 90^\circ$, защото раменете му са ъглополовящи на съседни ъгли. Ако M е средата на



хипотенузата EF в правоъгълния $\triangle EFD$, то $DM = \frac{1}{2}EF$ (медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник) и от условието следва, че $PD = DM$. Следователно $\triangle MPD$ е равнобедрен и заключаваме, че ако $\angle MFD = x$, то $\angle DPE = \angle PMD = 2\angle MFD = 2x$. Тогава от $\triangle PBF$ получаваме $2x + x + 90^\circ + 54^\circ = 180^\circ$, откъдето $x = 12^\circ$. Тъй като $\angle PED$ е външен за $\triangle EFD$, то $\angle PED = 90^\circ + 12^\circ = 102^\circ$.

44. Ася и Ваня купили по една кутия с един и същ брой пликчета с боя за яйца. С едно пликче могат да се боядисат 5 или 6 яйца. За празника в училище Ася боядисала 154 яйца с всички свои пликчета, а Ваня – 175 яйца, като също употребила всичките си пликчета. По колко пликчета има в една кутия?

А) по-малко от 26

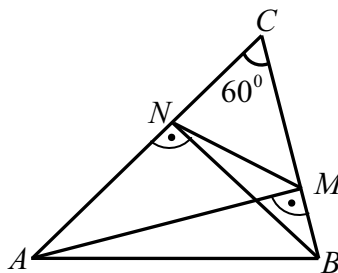
Б) 26

В) 30

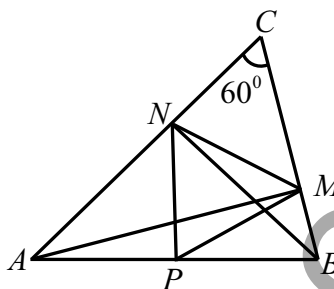
Г) повече от 30

Решение: **Отг. В).** Ако пликчетата в една кутия са по-малко от 30, т.е. най-много 29, то Ваня би боядисала най-много $29 \cdot 6 = 174$ яйца. Но тя е боядисала 175 яйца и следователно пликчетата са поне 30. Ако броят на пликчетата в една кутия е по-голям от 30, т.е. ако той е поне 31, то Ася би боядисала поне $31 \cdot 5 = 155$ яйца. Но тя е боядисала 154 и следователно пликчетата са най-много 30. Така заключаваме, че всяка кутия съдържа точно 30 пликчета.

46. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с $\angle ACB = 60^\circ$. Да се намери периметърът на $\triangle ABC$ в сантиметри, ако периметърът на $\triangle NMC$ е 11 см, където AM ($M \in BC$) и BN ($N \in AC$) са височините съответно към страните BC и AC в $\triangle ABC$.



Решение:А)



Ако P е средата на страната AB , то MP и NP са медиани съответно в правоъгълните триъгълници ABM и ABN , откъдето имаме, че $MP = NP = \frac{1}{2}AB$. От друга страна $\angle NPM = 180^\circ - (\angle APN + \angle BPM)$. Но триъгълниците APN и BPM са равнобедрени ($AP = NP$ и $BP = MP$) и отгук $\angle APN = 180^\circ - 2\angle BAC$ и $\angle BPM = 180^\circ - 2\angle ABC$. Тогава

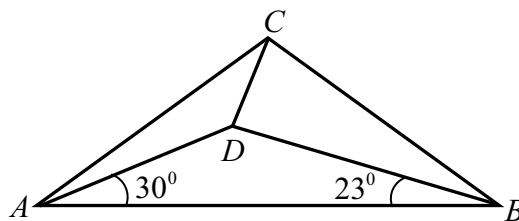
$$\begin{aligned} \angle NPM &= 180^\circ - (180^\circ - 2\angle BAC + 180^\circ - 2\angle ABC) = \\ &= 180^\circ - (360^\circ - 2(180^\circ - \angle ACB)) = 180^\circ - 2\angle ACB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \end{aligned}$$

Получаваме, че един от ъглите в равнобедрения $\triangle PMN$ е равен на 60° , откъдето следва, че този триъгълник е равностранен и в частност $NM = \frac{1}{2}AB$. В $\triangle AMC$ катетът

CM е срещу ъгъл от 30° , така че $CM = \frac{1}{2}AC$. Аналогично $CN = \frac{1}{2}BC$ и следователно

$11 = NM + CM + CN = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$. Тогава периметърът на $\triangle ABC$ е $2 \cdot 11 = 22$ см.

49. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с $\angle ACB = 106^\circ$. Точката D е във вътрешността на триъгълника така, че $\angle DAB = 30^\circ$ и $\angle ABD = 23^\circ$. Да се намери мярката на $\angle BDC$.



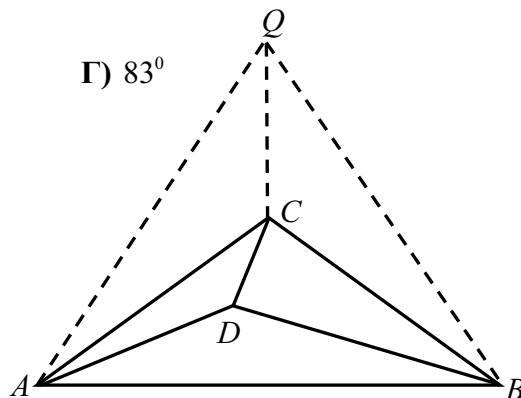
А) 90°

Б) 87°

В) 85°

Г) 83°

Решение: **Отговор Г).**



Тъй като $\angle ACB = 106^\circ$, то $\angle BAC = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 106^\circ) = 37^\circ$. Нека Q е точка в същата полуравнина спрямо AB , както и C така, че $\triangle ABQ$ е равностранен. Тогава $\angle QBC = \angle ABQ - \angle ABC = 60^\circ - 37^\circ = 23^\circ = \angle ABD$. От друга страна, $\triangle CBQ \cong \triangle CAQ$ по III признак, откъдето $\angle CQB = \angle CQA = 30^\circ$ и получаваме, че $\angle DAB = \angle CQB$. Следователно $\triangle ABD \cong \triangle QBC$ по II признак и заключаваме, че $BD = BC$, т.е. $\triangle CDB$ е равнобедрен и $\angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - 14^\circ) = 83^\circ$.

50. Върху стените на кубче са записани точно по веднъж числата от 1 до 6. Ако една от стените е избрана за основа и кубчето е поставено на нея, то сумата на числата върху околните стени е 13. При друг избор на основа сумата на числата върху околните стени става 12. Кое е числото върху стената, която е противоположна на стената с числото 1?

А) 2

Б) 3

В) 4 или 5

Г) 6

Решение: **Отг. Б).** Сумата на числата от 1 до 6 е 21. След като при първия избор на основа сумата на числата върху околните стени е 13, то сумата на числата върху двете основи (долна и горна) е $21 - 13 = 8$. Съществуват две възможности за сумата на числата върху тези противоположни стени: 2 и 6 или 3 и 5. Да предположим, че 3 и 5 са върху двете основи. От втория избор следва, че сумата на числата върху две противоположни стени (двете нови основи) е $21 - 12 = 9$. Това се реализира в два случая: 3 и 6 или 4 и 5. Във всеки от тези два случая участва или 3, или 5, откъдето заключаваме, че 3 и 5 не могат да са върху противоположни стени. Остава втората възможност от първия избор, а именно, че 2 и 6 са върху противоположни стени. Тогава единствената възможност от втория избор на основа е 5 и 4 да са върху противоположни стени. Следователно оставащите две числа 1 и 3 са също върху противоположни стени.