<u>ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА</u>

ПРИМЕРЕН ИЗПИТ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
2008 г.

По – долу са дадени 10 задачи, за всяка от които са посочени по четири възможни отговора <u>само един,</u> от които е верен. Заградете с кръгче <u>единствено</u> буквата на този отговор, който считате за верен. Всеки верен отговор носи по 1 точка. За неверен отговор, непосочен отговор или посочен повече от един отговор на дадена задача точки не се дават и не се отнемат.

1. Ако $a=\sqrt{2},\ b=3\sqrt{2}$, то изразът $\dfrac{a+b}{b-a}$ има стойност:

а) 2 ; б) $\dfrac{1}{2}$; в) -2 ; г) 6 .

2. Изразът $(a+b)^2-(a-b)^2$ е равен на:

а) ab; б) $3ab$; в) $4ab$; г) друг отговор.

3. След опростяване изразът $\dfrac{(x^2)^{11}}{x^{-7}.x^{28}}$ има вида:

а) x; б) x^2; в) x^3; г) x^{-1} .

4. Корените на квадратното уравнение $2x^2-3x+1=0$ са:

а) $\dfrac{1}{2}$ и 1; б) $\dfrac{1}{3}$ и 1; в) -1 и 1; г) 0 и 1.

5. Решенията на неравенството $x<\dfrac{1}{x}$ са:

а) $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$; б) $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$; в) няма решения; г) $x\in(-1,1)$.

6. Диагоналът на правоъгълник с лице $2\ cm^2$ и периметър $6\ cm$ е равен на:

а) $\sqrt{3}\ cm$; б) $1\ cm$; в) $\sqrt{5}\ cm$; г) $2\ cm$.

7. В равнобедрен триъгълник с основа $1\ cm$ и бедро $2\ cm$ ъглополовящата към бедрото разделя това бедро на отсечки с дължини:

а) $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{4}{3}$; б) $\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{5}{3}$; в) $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{3}{2}$; г) друг отговор.

8. Равностранен триъгълник вписан в окръжност с радиус $\sqrt{3}\ cm$ има страна:

а) $1\ cm$; б) $3\ cm$; в) $2\ cm$; г) $\sqrt{3}\ cm$.

9. Производната на функцията $(\sin 2x)^2$ е:

а) $2\sin 4x$; б) $2\cos 2x$; в) $2\sin 2x$; г) друг отговор.

10. Решението на системата $\left|\begin{array}{l} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right.$ е:

а) $(1,1)$; б) $(1,2)$; в) $(0,3)$; г) $(2,3)$.

- Решението на всяка от следващите 5 задачи започвайте на нова страница;
- номерирайте всички страници на беловата си;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Всяка пълно решена задача се оценява с 6 точки.

11. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които корените x_1, x_2 на уравнението $x^2 - ax + a + 3 = 0$ са реални и $|x_1 - x_2| \leq 3$.
12. Да се реши уравнението $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$.
13. Определете всички решения на уравнението $(\log_2 x)^2 - 5(\log_2 x) + 6 = 0$, които удовлетворяват неравенството $2x - 8 > 0$.
14. Дължините на страните на един триъгълник образуват аритметична прогресия. Да се докаже, че отсечката, свързваща центъра на вписаната окръжност и медицентъра (пресечната точка на медианите) на триъгълника, е успоредна на средната по големина страна. Да се намери дължината на тази отсечка, ако разликата на прогресията е равна на 3.
15. Основата на пирамида е равнобедрен трапец с големина 30° на един от ъглите му и дължина $\sqrt{3}$ на височината. Всички околни стени сключват с основата ъгли с големина 60°. Да се намерят обемът, пълната повърхнина на пирамидата и радиусът на вписаната сфера.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 4 АСТРОНОМИЧЕСКИ ЧАСА

Окончателната оценка K от изпита се получава по формулата $K = 2 + \frac{T}{10}$, където T е броят на събраните от Вас точки.

НА ВСИЧКИ КАНДИДАТСТУДЕНТИ ПОЖЕЛАВАМЕ УСПЕХ!

ОТГОВОРИ на задачи 1 – 10

1 а	2 в	3 а	4 а	5 а	6 в	7 а	8 б	9 а	10 б

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ на задачи 11 – 15

11. Дискриминантата $D = a^2 - 4(a+3) = a^2 - 4a - 12$ на квадратното уравнение трябва да е неотрицателна, откъдето получаваме $a \in (-\infty, -2] \cup [6, +\infty)$. Записваме неравенството $|x_1 - x_2| \le 3$ като го преобразуваме последователно:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} \le 3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 9.$$

Сега от формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = a$ и $x_1x_2 = a + 3$ и последното неравенство добива вида $a^2 - 4(a+3) \le 9 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 21 \le 0$ с решения $a \in [-3, 7]$. Окончателно за стойностите на a получаваме: $a \in [-3, -2] \cup [6, 7]$.

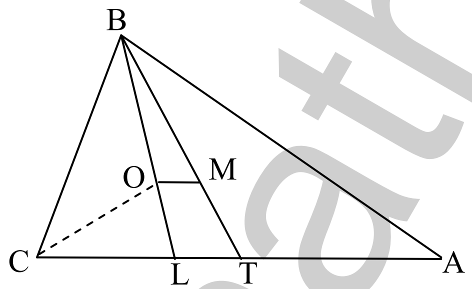
12. Уравнението има смисъл при $x^2 - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Записваме изходното уравнение във вида $\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$ и след повдигане на двете му страни в квадрат получаваме (квадратното) уравнение $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Проверката показва, че $\dfrac{3}{2}$ е корен и на изходното уравнение.

13. Уравнението има смисъл точно когато $\log_2 x$ има смисъл, т. е. при $x > 0$. Полагаме $\log_2 x = y$ и получаваме квадратното уравнение $y^2 - 5y + 6 = 0$ с корени $y_1 = 2,\ y_2 = 3$. Така изходното уравнение е еквивалентно на уравненията

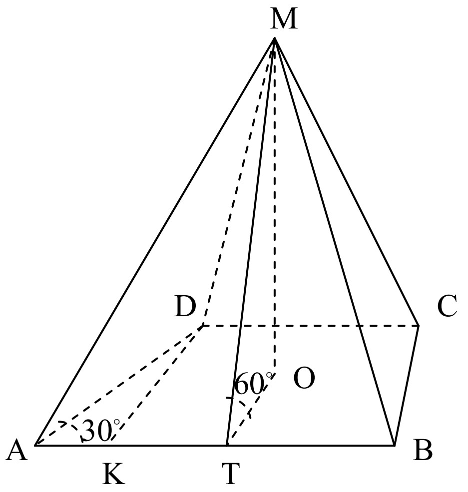
$$\log_2 x = 2 \text{ и } \log_2 x = 3,$$

откъдето намираме решенията $x_1 = 4$ и $x_2 = 8$, от които само $x_2 = 8$ удовлетворява неравенството $2x - 8 > 0$.



14. Нека страните на триъгълника са $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$, като $a < b < c$, BL и BT са съответно ъглополовящата и медианата от върха B, а O и M са съответно центърът на вписаната окръжност и медицентърът. Очевидно $CL < CT$, тъй като $BC < AB$. От свойството на ъглополовящата CO в $\triangle BCL$ имаме $\dfrac{BO}{OL} = \dfrac{BC}{CL}$. От триъгълника ABC лесно се пресмята, че $CL = \dfrac{ab}{a+c}$. Така получаваме $\dfrac{BO}{OL} = \dfrac{a+c}{b} = \dfrac{2b}{b} = 2$ (тук сме използували, че $a + c = 2b$, понеже дължините на страните на триъгълника образуват аритметична прогресия). Тъй като от свойството на медицентъра M имаме и $\dfrac{BM}{MT} = 2$, следва, че

$OM \parallel CA$. Сега от $\frac{OM}{LT}=\frac{BM}{BT}=\frac{2}{3}$ получаваме $OM=\frac{2}{3}LT=\frac{2}{3}(CT-CL)=\frac{2}{3}(\frac{b}{2}-\frac{ab}{a+c})=\frac{b(c-a)}{3(c+a)}=\frac{c-a}{6}=\frac{(a+2.3)-a}{6}=1$.



15. Нека пирамидата е $ABCDM$ и V, S и S_1 са съответно обемът, околната и пълната повърхнина на тази пирамида. Нека O е ортогоналната проекция на върха M върху основата $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). От условието на задачата следва, че O е равноотдалечена от страните на основата и следователно в трапеца $ABCD$ се вписва окръжност с център O, а в пирамидата може да се впише сфера. Нека $OT \perp AB$ $(T \in AB)$ и $DK \perp AB$ $(K \in AB)$. Тогава DK е височината на трапеца, $\measuredangle OTM = 60^\circ$ и OT е радиус на вписаната в трапеца $ABCD$ окръжност, като $OT=\frac{1}{2}DK=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тъй като трапецът е описан около окръжност и равнобедрен с бедро $AD\,(=BC)$ имаме, че $2AD = AB + CD$. Сега от $\triangle ADK$, в който (по условие) $\measuredangle KAD = 30^\circ$ намираме $AD = 2DK = 2\sqrt{3}$.

Така $\frac{AB+CD}{2}=AD=2\sqrt{3}$ и за лицето на основата на пирамидата имаме $S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}DK=2\sqrt{3}.\sqrt{3}=6$. От правоъгълния $\triangle MOT$ намираме височината $MO = OT.tg60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}$ и апотемата $MT=\frac{OT}{\cos 60^\circ}=2.OT=2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ на пирамидата. Тогава, понеже $AB+BC+CD+AD=4AD=4.2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$, получаваме:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.MO=\frac{1}{3}.6.\frac{3}{2}=3,\quad S=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)MT=\frac{1}{2}.8\sqrt{3}.\sqrt{3}=12,$$

$$S_1 = S + S_{ABCD} = 12 + 6 = 18.$$

Накрая, от формулата $V=\frac{S_1.r}{3}$ за радиуса r на вписаната в пирамидата сфера намираме

$$r=\frac{3V}{S_1}=\frac{3.3}{18}=\frac{1}{2}.$$