ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

Предварителен изпит – тест по математика

ТЕМА 3

19 април 2008 г.

По – долу са дадени 10 задачи като за всяка една задача са посочени по четири възможни отговора <u>само един</u>, от които е верен. Заградете с кръгче <u>единствено</u> буквата на този отговор, който считате за верен. Всеки верен отговор носи по 1 точка. За неверен отговор, непосочен отговор или посочен повече от един отговор на дадена задача точки не се дават и не се отнемат.

1. Ако $a = \sqrt{3},\ b = 3\sqrt{3}$, то изразът $\dfrac{a+2b}{b-2a}$ има стойност :

а) 3 ; **б)** $\dfrac{1}{3}$; **в)** -7 ; **г)** 7 .

2. Ако $t = 2^{11}.4^{-5}.3^{7} - 2.3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-6}$, то :

а) $t = 0$; **б)** $t = 2$; **в)** $t = 3$; **г)** $t = 5$.

3. Ако първият и третият член на геометрична прогресия са съответно равни на $\dfrac{1}{9}$ и $\dfrac{1}{81}$, то частното на прогресията е :

а) $-\dfrac{1}{3}$; **б)** $\dfrac{1}{3}$; **в)** 3 ; **г)** $-\dfrac{1}{3}$ или $\dfrac{1}{3}$.

4. Ако числото $x = 2$ е корен на уравнението $x^2 - 3x + c = 0$, то другият корен на уравнението е равен на :

а) -2 ; **б)** c ; **в)** $c-1$; **г)** 3 .

5. Решенията на неравенството $x^2 > 16$ са :

а) $x > 4$; **б)** $x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$; **в)** $x < -4$; **г)** $x \in (-4, 4)$.

6. Решенията на неравенството $3^x \geq 81$ са :

а) $x \geq 4$; **б)** $x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$; **в)** $x \leq 4$; **г)** $x \in [-4, 4]$.

7. Височината през върха на правия ъгъл разделя хипотенузата на правоъгълен триъгълник на отсечки с дължини $4\ cm$ и $9\ cm$. Лицето на триъгълника е :

а) $26\ cm^2$; **б)** $30\ cm^2$; **в)** $39\ cm^2$; **г)** $\sqrt{39}\ cm^2$.

8. Равностранен триъгълник вписан в окръжност с радиус $\sqrt{3}\ cm$ има страна :

а) $1\ cm$; **б)** $3\ cm$; **в)** $2\ cm$; **г)** $\sqrt{3}\ cm$.

9. Ако $tg\alpha = 2\sqrt{2}$ и $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin\alpha$ е равна на :

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; **в)** 2 ; **г)** -2 .

10. Лицето на равнобедрен трапец с височина $12\ cm$ и диагонал $13\ cm$ е равно на :

а) $35\ cm^2$; **б)** $40\ cm^2$; **в)** $50\ cm^2$; **г)** $60\ cm^2$

math-bg.com

ТЕМА 3
ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
г	а	г	в	б	а	в	б	б	г

11. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които корените на уравнението $(a+2)x^2-2ax+3a=0$ са положителни числа.

Решение. При $a=-2$ уравнението добива вида $4x-6=0$ и има единствен (положителен) корен $x=\frac{3}{2}$. Следователно при $a=-2$ е изпълнено условието в задачата. Ако $a\neq -2$ уравнението е квадратно и ще има положителни корени x_1 и x_2 точно когато $D=4[a^2-3a(a+2)]\geq 0$, $x_1+x_2=\frac{2a}{a+2}>0$ и $x_1.x_2=\frac{3a}{a+2}>0$. Решението на последната система от неравенства е : $a\in[-3,-2)$. Окончателно за стойностите на a получаваме: $a\in[-3,-2]$.

12. Да се реши неравенството $\sqrt{2x-1}\ \leq\ 2-\sqrt{3x-2}$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$. Тогава то е равносилно с:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}\leq 2,\ (\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2})^2\leq 4,\ 2\sqrt{(2x-1)(3x-2)}\leq 7-5x.$$

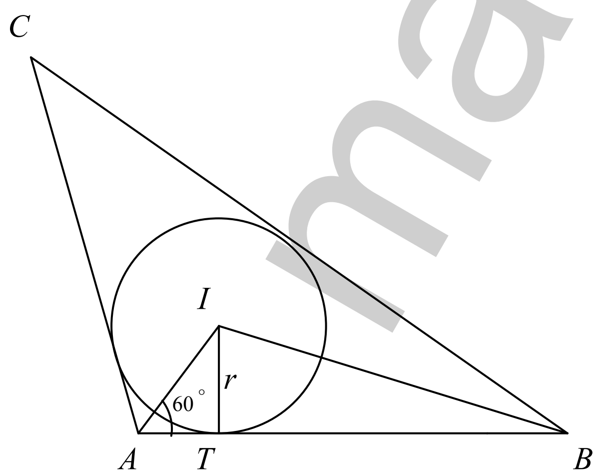
Последното неравенство има смисъл при $7-5x\geq 0$ и оттук (тъй като $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$)

намираме $x\in\left[\frac{2}{3},\frac{7}{5}\right]$, в който случай то е равносилно с: $4(2x-1)(3x-2)\leq(7-5x)^2,\ x^2-42x+41\geq 0.$

Решенията на това квадратно неравенство са $x\in(-\infty,1]\cup[41,+\infty)$. Предвид $x\in\left[\frac{2}{3},\frac{7}{5}\right]$, решенията на изходното неравенство са $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$.

13. Намерете всички решения на уравнението $2\log_2 x-3\log_x 4=1$.

Решение. Уравнението има смисъл при $x>0$ и $x\neq 1$. Тъй като $\log_x 4=2\ \log_x 2=\frac{2}{\log_2 x}$, след полагането $y=\log_2 x$, получаваме: $2y-\frac{6}{y}=1,\ 2y^2-y-6=0.$ Корените на последното уравнение са $y=2$ и $y=-\frac{3}{2}$. Сега от $\log_2 x=2$ и $\log_2 x=-\frac{3}{2}$ намираме решенията: $x=4$ и $x=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.



14. В триъгълник ABC с $\measuredangle BAC=120°$ е вписана окръжност с радиус $r=\sqrt{3}$. Докажете, че ако c и a са дължините съответно на страните AB и BC на триъгълника ABC, то $c>4$ и $a=\frac{c^2-2c+4}{c-4}$. Определете най – малката възможна стойност на a и ъглите на триъгълника при тази стойност на a.

Решение. Използваме общоприети означения за триъгълника ABC. По-специално: $AC=b,\ \measuredangle BAC=\alpha,$ $\measuredangle ABC=\beta,\ p=(a+b+c)/2,$ S е лицето на триъгълника и нека I е центъра на вписаната в него окръжност, която се допира до страната AB в точка T.

В правоъгълния триъгълник ATI ($\measuredangle ATI = 90°$) имаме: $\measuredangle TAI = 60°$ и $IT = r = \sqrt{3}$. Сега $AT = IT.\cot g\measuredangle TAI = r.\cot g 60° = \frac{r\sqrt{3}}{3} = 1$. Аналогично от $\triangle BTI$ намираме $TB = r.\cot g\frac{\beta}{2} = \sqrt{3}.\cot g\frac{\beta}{2}$.

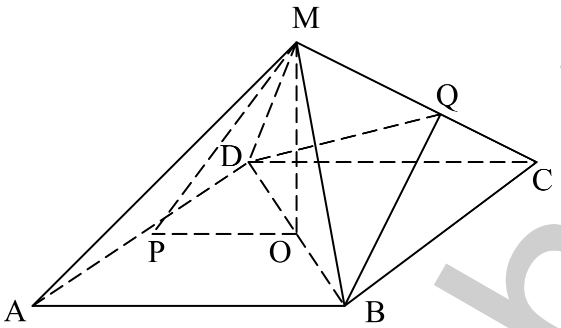
Така $c = AB = AT + TB = 1 + \sqrt{3}\cot g\frac{\beta}{2}$. От $\beta < 180° - \alpha = 60°$, т. е. $\frac{\beta}{2} < 30°$, имаме $\cot g\frac{\beta}{2} > \cot g 30° = \sqrt{3}$ и оттук $c = 1 + \sqrt{3}\cot g\frac{\beta}{2} > 1 + \sqrt{3}.\sqrt{3} = 4.$

За да изразим a (и b) намираме две зависимости между a, b, c и r. Най – напред, от по–горе имаме $AT = 1$ и сега от $AT = p - a = (b + c - a)/2$ получаваме (1) $b = a - c + 2$. От друга страна $S = pr = \frac{bc\sin\alpha}{2}$, откъдето записваме (2) $2(a + b + c) = bc$. След изключване на b от (1) и (2) намираме $a = \frac{c^2 - 2c + 4}{c - 4}$; пресмятаме и $b = \frac{4(c-1)}{c-4}$.

За да определим най – малката стойност на a изследваме функцията $a(c) = \frac{c^2 - 2c + 4}{c - 4}$ при $c \in (4, +\infty)$.
Имаме

$$a'(c) = \frac{(2c-2)(c-4) - (c^2 - 2c + 4).1}{(c-4)^2} = \frac{c^2 - 8c + 4}{(c-4)^2},$$

като $a'(c) = 0$ при $c = 4 - 2\sqrt{3} \notin (4, +\infty)$ и $c = 4 + 2\sqrt{3}$. Сега $a'(c) < 0$ при $c \in (4, 4 + 2\sqrt{3})$ и $a'(c) > 0$ при $c \in (4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$. Така функцията $a(c)$ намалява в интервала $(4, 4 + 2\sqrt{3})$ и расте в интервала $(4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$. Следователно най – малката стойност на $a(c)$ в интервала $(4, +\infty)$ се достига при $c = 4 + 2\sqrt{3}$. Тогава $a = 6 + 4\sqrt{3}$, $b = 4 + 2\sqrt{3} = c$ и триъгълник ABC, удовлетворяващ условието на задачата, е равнобедрен с ъгли $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$.



15. Основният ръб в правилна четириъгълна пирамида има дължина, която е два пъти по – голяма от дължината на височината към основата. Да се намери ъгълът между две съседни околни стени на пирамидата.

Решение. Нека пирамидата е $ABCDM$ с основа $ABCD$ и връх M, точката O е центърът на квадрата $ABCD$, P е средата на AD и $AB = a$, $AM = l$, $MO = h$ и $MP = b$ са съответно основният ръб, околният ръб, височината и апотемата на пирамидата. Височините от върховете B и D на еднаквите триъгълници BCM и DCM имат равни дължини и пресичат правата CM в една и съща точка Q. Търсеният от нас ъгъл е $\measuredangle BQD$, който е ъгълът между околните стени BCM и DCM. От условието на задачата имаме, че $\triangle OPM$ е равнобедрен ($OP = OM = \frac{a}{2}$) и тъй като е правоъгълен, намираме $\frac{a}{2b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. От косинусовата теорема приложена за $\triangle BDQ$ получаваме $\cos\measuredangle BQD = \frac{BQ^2 - a^2}{BQ^2} = 1 - \left(\frac{a}{BQ}\right)^2$.

Изразявайки лицето на $\triangle BCM$ по два начина, записваме $ab = l.BQ\ (= 2S_{BCM}) \Leftrightarrow \frac{a}{BQ} = \frac{l}{b}$, откъдето определяме, че $\cos\measuredangle BQD = 1 - \left(\frac{a}{BQ}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{b^2}$. Сега от равенството $l^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$ (питагорова теорема за $\triangle APM$) намираме $\frac{l^2}{b^2} = 1 + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$. Така $\cos\measuredangle BQD = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ и следователно (тъй като $\measuredangle BQD \in (0, 180^\circ)$) търсеният ъгъл е равен на 120°.

- Решението на всяка от следващите 5 задачи започвайте на нова страница;
- номерирайте всички страници на беловата си;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Всяка пълно решена задача се оценява с 6 точки.

11. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които корените на уравнението $(a+2)x^2-2ax+3a=0$ са положителни числа.

12. Да се реши неравенството $\sqrt{2x-1} \le 2-\sqrt{3x-2}$.

13. Намерете всички решения на уравнението $2\log_2 x-3\log_x 4=1$.

14. В триъгълник ABC с $\measuredangle BAC=120^\circ$ е вписана окръжност с радиус $r=\sqrt{3}$. Докажете, че ако c и a са дължините съответно на страните AB и BC на триъгълника ABC, то $c>4$ и $a=\dfrac{c^2-2c+4}{c-4}$. Определете най – малката възможна стойност на a и ъглите на триъгълника при тази стойност на a.

15. Основният ръб в правилна четириъгълна пирамида има дължина, която е два пъти по – голяма от дължината на височината към основата. Да се намери ъгълът между две съседни околни стени на пирамидата.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 4 АСТРОНОМИЧЕСКИ ЧАСА

Окончателната оценка K от изпита се получава по формулата $K=2+\dfrac{T}{10}$, където T е броят на събраните от Вас точки.

НА ВСИЧКИ КАНДИДАТСТУДЕНТИ ПОЖЕЛАВАМЕ УСПЕХ!

math-bg.com