Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

9. клас

1. Решете уравненията:

а) $3\left(x^2-\dfrac{8}{x}\right):\left(x^2+2x+4\right)=\dfrac{5x-15}{x^2-x-6}$; **3 точки**

б) $\sqrt{5x^2+10x+1}+x^2+2x=7$. **4 точки**

2. Даден е триъгълник ABC ($AC < BC$). В триъгълника е вписана окръжност с център O, която се допира до страните му AB, BC и AC съответно в точките M, N и P. Ъглополовящата на $\measuredangle ACB$ пресича страната AB в точка L. Ако $ML = 1$ cm, $CP = 3$ cm и $LN \parallel AC$, намерете:

а) дължините на страните на $\triangle ABC$; **5 точки**

б) отношението $CO:OL$. **2 точки**

3. Дадено е уравнението $mx^4-(2m-1)x^2+m-2=0$. Намерете стойностите на параметъра m, за които уравнението:

а) има два различни реални корена; **3 точки**

б) има четири различни реални корена x_1, x_2, x_3 и x_4, за които е изпълнено, че $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=6x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2$. **4 точки**

9. клас

1. Решете уравненията:

а) $3\left(x^2-\dfrac{8}{x}\right):\left(x^2+2x+4\right)=\dfrac{5x-15}{x^2-x-6}$; **3 точки**

б) $\sqrt{5x^2+10x+1}+x^2+2x=7$. **4 точки**

а) Дефиниционното множество на уравнението е $x\neq 0, 3, -2$. 0,5 точки

Уравнението е еквивалентно на $\dfrac{3(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x\left(x^2+2x+4\right)}=\dfrac{5(x-3)}{(x-3)(x+2)}\Leftrightarrow$ 1 точка

$3x^2-5x-12=0$. Корените на последното уравнение са $x_1=-\dfrac{4}{3}$ и $x_2=3$. 1 точка

3 не е допустима стойност и не е решение. Единствено решение е $x_1=-\dfrac{4}{3}$. 0,5 точки

б) Полагаме $x^2+2x=t$. Уравнението добива вида $\sqrt{5t+1}=7-t$. 1 точка

След повдигане на квадрат получаваме уравнението $t^2-19t+48=0$ 1 точка

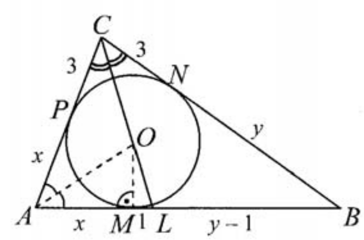
с корени $t_1=3$ и $t_2=16$. Чрез непосредствена проверка се установява, че 3 е решение, а 16 не е решение на ирационалното уравнение $\sqrt{5t+1}=7-t$. 1 точка

Корените на даденото уравнение намираме от $x^2+2x-3=0$, т.е. $x_1=-3, x_2=1$. 1 точка

2. Даден е триъгълник *ABC* (*AC* < *BC*). В триъгълника е вписана окръжност с център O, която се допира до страните му *AB*, *BC* и *AC* съответно в точките *M*, *N* и *P*. Ъглополовящата на ∡*ACB* пресича страната *AB* в точка *L*. Ако *ML* = 1 cm, *CP* = 3 cm и *LN* || *AC*, намерете:

а) дължините на страните на △*ABC*; **5 точки**

б) отношението $CO:OL$. **2 точки**



а) От свойство на ъглополовящата и теорема на Талес следва, че $\dfrac{AL}{LB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CN}{BN}$ 1 точка

Въведени неизвестните *AM* = *AP* = *x* и *BM* = *BN* = *y* и

получена системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{y-1}=\dfrac{x+3}{y+3}\\[2mm] \dfrac{x+1}{y-1}=\dfrac{3}{y}\end{array}\right.\Leftrightarrow$ 2 точки

$\left|\begin{array}{l}2x-y+3=0\\ xy-2y+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}y=2x+3\\ 2x^2-x-3=0\end{array}\right.$. 1 точка

От последното уравнение следва, че $x_1=-1$ (не е решение) и $x_2=1{,}5$. Следователно *AB* = 7,5 cm, *BC* = 9 cm, *AC* = 4,5 cm. 1 точка

б) *AO* е ъглополовяща в △*ACL*. 1 точка

Следователно $\dfrac{CO}{OL}=\dfrac{CA}{AL}=\dfrac{4{,}5}{2{,}5}=\dfrac{9}{5}$. 1 точка

3. Дадено е уравнението $mx^4 - (2m-1)x^2 + m - 2 = 0$. Намерете стойностите на параметъра *m*, за които уравнението:

а) има два различни реални корена; **3 точки**

б) има четири различни реални корена x_1, x_2, x_3 и x_4, за които е изпълнено, че $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 6x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2$. **4 точки**

а) Полагаме $x^2 = y$ и получаваме уравнението $my^2 - (2m-1)y + m - 2 = 0$.

При $m = 0$ уравнението има вида $x^2 - 2 = 0$ и $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, т.е. $m = 0$ е решение. 1 точка

При $D = 0$ и $y_{1,2} = -\frac{b}{2a} > 0$, т.е. $m = -\frac{1}{4}$ уравнението има два различни реални корена.

1 точка

При $y_1y_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Leftrightarrow m \in (0; 2)$ уравнението има два различни реални корена.

1 точка

б) Уравнението има четири различни реални корена, ако $\begin{cases} D > 0, m \neq 0 \\ y_1y_2 > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ \frac{m-2}{m} > 0 \\ \frac{2m-1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty).$$ 1 точка

От $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$ следва, че $x_1^2 = x_2^2 = y_1$ и $x_3^2 = x_4^2 = y_2$ и

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 6x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 \Leftrightarrow 2(y_1^2 + y_2^2) = 6y_1^2y_2^2 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 = 3y_1^2y_2^2$ 1 точка

Следователно $\left(\frac{2m-1}{m}\right)^2 - 2\frac{m-2}{m} = 3\left(\frac{m-2}{m}\right)^2$, 1 точка

Откъдето получаваме $m_1 = 1$ (не е решение) и $m_2 = 11$ (решение) 1 точка.