Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

8. клас

1. а) Числото -1 е корен на уравнението $4a^2x^2+4x+4a+5=0$, където a е параметър. Намерете другия корен на уравнението.

3 точки

б) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-6x-11=0$, намерете стойността на израза $\sqrt{11+6x_1}+\sqrt{11+6x_2}$. **4 точки**

2. Даден е трапецът $ABCD$ ($AB \parallel CD$), за който $AB = 2CD$. Точка M е средата на AB, а точка F е такава, че $\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{AD}$.

а) Докажете, че точка C е медицентърът на $\triangle BDF$; **3 точки**

б) Ако точка N е средата на отсечката BF и лицето на триъгълника DNF е 20 cm^2, намерете лицето на трапеца $ABCD$. **4 точки**

3. Даден е изразът $A=\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{ac}{b^2-bc}\right):\left(\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b-c}{a}-2\right)$.

а) Докажете, че $A=\dfrac{a+b-c}{a+c-b}$ за всички допустими стойности на променливите; **4 точки**

б) Намерете стойността на A, ако $a=\sqrt{3.(-7)^2}$, $b=\sqrt{48}$ и $c=\sqrt{3^5}$. **3 точки**

<u>УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ</u>

<u>*8. клас*</u>

1. а) Числото –1 е корен на уравнението $4a^2x^2+4x+4a+5=0$, където *a* е параметър. Намерете другия корен на уравнението. **3 точки**

б) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-6x-11=0$, намерете стойността на израза $\sqrt{11+6x_1}+\sqrt{11+6x_2}$. **4 точки**

Намерено:

а) $4a^2+4a+1=0$ 1 точка

$a=-0,5$ 1 точка

другият корен на уравнението $x_2=-3$ 1 точка

б) $x_{1,2}=3\pm\sqrt{20}$ 1 точка

I начин: $11+6x_1={x_1}^2$ и $11+6x_2={x_2}^2$ 1 точка II начин: $\sqrt{29+6\sqrt{20}}+\sqrt{29-6\sqrt{20}}=$

$\Rightarrow\sqrt{11+6x_1}+\sqrt{11+6x_2}=|x_1|+|x_2|=$ 1 точка $=\sqrt{\left(\sqrt{20}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{20}-3\right)^2}=$ 2 точки

$=3+\sqrt{20}+\sqrt{20}-3=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$ 1 точка $=\left|\sqrt{20}+3\right|+\left|\sqrt{20}-3\right|=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

1 точка

2. Даден е трапецът *ABCD* (*AB* || *CD*), за който *AB* = 2*CD*. Точка *M* е средата на *AB*, а точка *F* е такава, че $\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{AD}$.

а) Докажете, че точка *C* е медицентърът на $\triangle BDF$; **3 точки**

б) Ако точка *N* е средата на отсечката *BF* и лицето на триъгълника *DNF* е 20 cm², намерете лицето на трапеца *ABCD*. **4 точки**

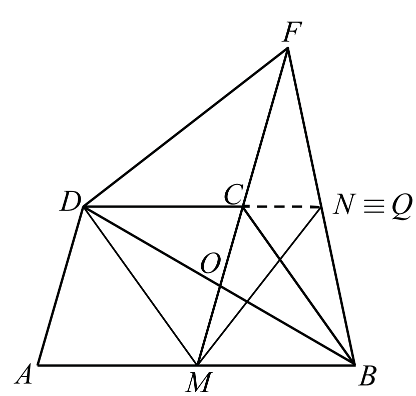
а) Доказано, че $C\in MF$ и $MC=CF$. 1 точка

I начин: Доказано, че *MF* пресича *BD* в *O* – среда на *BD* 1 точка

и $CF:CO=2:1$. 1 точка

II начин: Ако $DC\cap BF=Q$, доказано, че *Q* е среда на *BF* 1 точка

и $DC:CQ=2:1$ 1 точка



б) Ако $AM=MB=CD=x$, то $DN=\frac{3}{2}x$. 1 точка

Нека $FH\perp DN\left(H\in DN\right)$ и $CT\perp AB\left(T\in AB\right)$. От $\triangle MTC\cong\triangle CHF\Rightarrow FH=CT=h$ 1 точка

$S_{DNF}=\frac{3}{4}xh=20\text{ cm}^2$ 1 точка

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(x+2x\right)h=\frac{3}{2}xh=2S_{DNF}=40\text{ cm}^2$ 1 точка

3. Даден е изразът $A=\left(\frac{a}{b}-\frac{b-c}{a}+\frac{ac}{b^2-bc}\right):\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b-c}{a}-2\right)$.

а) Докажете, че $A=\frac{a+b-c}{a+c-b}$ **за всички допустими стойности на променливите;** **4 точки**

б) Намерете стойността на A**, ако** $a=\sqrt{3.(-7)^2}$, $b=\sqrt{48}$ **и** $c=\sqrt{3^5}$. **3 точки**

а) За представяне на изразите във всяка от скобите във вида

$$\frac{b(a+b-c)(a-b+c)}{ab(b-c)}\cdot\frac{a(b-c)}{(a-b+c)^2}$$

по 2 точки

б) Намерено:

$a=7\sqrt{3}, b=4\sqrt{3}, c=9\sqrt{3}$ 2 точки

$A=\frac{1}{6}$ 1 точка