

Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

7. клас

1. Дадени са изразите

$$M = (a + b - 1)^2 - 2 + 2a + 2b \text{ и } N = a^2 - b^2 - a + b.$$

а) Намерете стойностите на изразите M и N , ако a е равно на корена на уравнението $x(x+2)^2 - (x+1)^3 - \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = 0$, а b е най-малкото число, за което е изпълнено равенството

$$2|b - 3| + 4|b - 3| = 24.$$

4 точки

б) Разложете на множители изразите M , N и $M - N$.

3 точки

2. За четириъгълника $ABCD$ е дадено, че $BC = CD$, $\angle ABD = 30^\circ$ и $\angle ADC = 2\angle ABC$. Симетралата на диагонала BD пресича страната AB в точка M .

а) Докажете, че DM е симетрала на диагонала AC ;

4 точки

б) Намерете дължината на диагонала AC , ако той дели BD на отсечки с дължини 5 cm и 7 cm.

3 точки

3. Скоростта на течението на една река е 3 km/h. В 8 ч 45 мин от пристанище A за пристанище B по течението на реката тръгнал сал, а 20 мин по-късно от B за A тръгнала лодка, която се движела със скорост 12 km/h. При срещата им се оказало, че лодката е изминала три пъти по-голямо разстояние от сала.

а) Намерете разстоянието между двете пристанища и в колко часа лодката и сала са се срещнали.

4 точки

б) Ако след срещата лодката пристигнала в A , направила почивка от 20 мин и отпътувала обратно за B , намерете в колко часа и на какво разстояние от B , тя е настигнала сала.

3 точки

7. клас

1. Дадени са изразите $M = (a + b - 1)^2 - 2 + 2a + 2b$ и $N = a^2 - b^2 - a + b$.

а) Намерете стойностите на изразите M и N , ако a е равно на корена на уравнението $x(x + 2)^2 - (x + 1)^3 - \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = 0$, а b е най-малкото число, за

което е изпълнено равенството $2|b - 3| + 4|b - 3| = 24$. 4 точки

б) Разложете на множители изразите M , N и $M - N$. 3 точки

Намерено:

а) $a = x = 0$ 1,5 точки

$b = -1$ 1,5 точки

$M = 0$ и $N = -2$ 1 точка

б) $M = (a + b - 1)(a + b + 1)$ 1 точка

$N = (a - b)(a + b - 1)$ 1 точка

$M - N = (a + b - 1)(2b + 1)$ 1 точка

2. За четириъгълника $ABCD$ е дадено, че $BC = CD$, $\angle ABD = 30^\circ$ и $\angle ADC = 2\angle ABC$. Симетралата на диагонала BD пресича страната AB в точка M .

а) Докажете, че DM е симетрала на диагонала AC ; 4 точки

б) Намерете дължината на диагонала AC , ако той дели BD на отсечки с дължини 5 cm и 7 cm. 3 точки

а) Доказано, че:

$C \in s_{BD}$ и $MB = MD$ 1 точка

$\angle MDC = \angle ABC = \angle ADM$ 1 точка

$\angle DMC = \angle CMB = \angle AMD = 60^\circ$ 1 точка

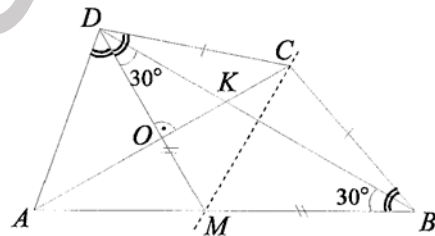
$\triangle AMD \cong \triangle CMD \Rightarrow AD = CD, AM = CM \Rightarrow DM$ е симетрала на AC . 1 точка

б) Намерено, че:

$OK = \frac{1}{2} DK = 2,5 \text{ cm}$ 1 точка

$AK = BK = 7 \text{ cm}$ 1 точка

$AC = 2 \cdot AO = 9 \text{ cm}$ 1 точка



3. Скоростта на течението на една река е 3 km/h. В 8 ч 45 мин от пристанище A за пристанище B по течението на реката тръгнал сал, а 20 мин по-късно от B за A тръгнала лодка, която се движела със скорост 12 km/h. При срещата им се оказало, че лодката е изминала три пъти по-голямо разстояние от сала.

а) Намерете разстоянието между двете пристанища и в колко часа лодката и сала са се срещнали. 4 точки

б) Ако след срещата лодката пристигнала в A , направила почивка от 20 мин и отпътувала обратно за B , намерете в колко часа и на какво разстояние от B , тя е настигнала сала. 3 точки

а) Съставен модел на движението от тръгването до срещата 2 точки

Намерен часът на срещата 10 ч 5 мин и 1 точка

разстоянието между пристанищата A и B 16 km 1 точка

б) Съставен модел на движението от срещата до настигането 2 точки

Намерен часът на настигането 11 ч 9 мин и 0,5 точки

разстоянието от B до настигането 8,8 km 0,5 точки