

Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика  
15 март 2009 година – София

12. клас

1. а) Пресметнете стойността на израза

$$A = 5^{\log_{0.2} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1) + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

3 точки

- б) Намерете двойките числа  $(x; y)$ , за които е изпълнено равенството  $(\log_3 5)^{\sqrt{x-2y+1}} = (\log_5 3)^{\sqrt{x^2-y^2+5y-3}}$ .

4 точки

2. Всички ръбове на правилната триъгълна призма  $ABC A_1 B_1 C_1$  имат дължина 1. Точките  $M$  и  $N$  са средите съответно на ръбовете  $AB$  и  $CC_1$ .  
Намерете:

- а) дължината на отсечката  $MN$  и косинуса на ъгъла между правите  $MN$  и  $BA_1$ ;

3 точки

- б) разстоянието от точка  $A_1$  до равнината  $(B_1 MN)$ .

4 точки

3. Дадена е функцията  $f(x) = (-2x-2)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}$ .

- а) Намерете най-малката стойност на функцията;

3 точки

- б) За кои стойности на параметъра  $a$  уравнението

$$(-2x-2)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{2}} = a$$

има единствено решение?

4 точки

## 12. клас

1. а) Пресметнете стойността на израза

$$A = 5^{\log_{0.2} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1) + \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{6} + \sqrt{2}). \quad 3 \text{ точки}$$

б) Намерете двойките числа  $(x; y)$ , за които е изпълнено равенството

$$(\log_3 5)^{\sqrt{x-2y+1}} = (\log_5 3)^{\sqrt{x^2-y^2+5y-3}}. \quad 4 \text{ точки}$$

а) За намерено  $5^{\log_{0.2} \frac{1}{2}} = 2$  1 точка

и  $\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1) + \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 3$  2 точки

б)  $(\log_3 5)^{\sqrt{x-2y+1}} = (\log_5 3)^{\sqrt{x^2-y^2+5y-3}} \Leftrightarrow (\log_3 5)^{\sqrt{x-2y+1}} = (\log_3 5)^{-\sqrt{x^2-y^2+5y-3}} \Leftrightarrow$   
 $\sqrt{x-2y+1} = -\sqrt{x^2-y^2+5y-3}$  1 точка

Но  $\sqrt{x-2y+1} \geq 0$  и  $-\sqrt{x^2-y^2+5y-3} \leq 0$ . Следователно уравнението е еквивалентно на

системата 
$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x^2-y^2+5y-3=0 \end{cases} \quad 1 \text{ точка}$$

За намерени решенията на системата  $(-3; -1)$  и  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ . 2 точки

2. Всички ръбове на правилната триъгълна призма  $ABCA_1B_1C_1$  имат дължина 1.

Точките  $M$  и  $N$  са средите съответно на ръбовете  $AB$  и  $CC_1$ . Намерете:

а) дължината на отсечката  $MN$  и косинуса на ъгъла между правите  $MN$  и  $BA_1$ ;

3 точки

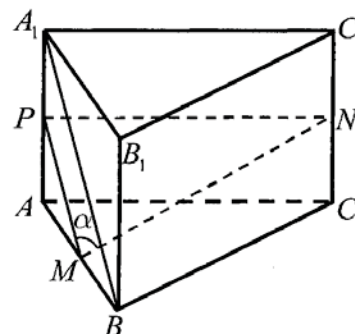
б) разстоянието от точка  $A_1$  до равнината  $(B_1MN)$ .

4 точки

а) От правоъгълния  $\triangle MNC \Rightarrow MN = \sqrt{MC^2 + NC^2} = 1$

1 точка

$\angle PMN = \angle (BA_1; MN) = \alpha$ , където  $MP \parallel BA_1$  1 точка



$MP = \frac{1}{2} A_1B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $PN = 1$  и от  $\triangle MNP$  по косинусова теорема намираме, че

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad 1 \text{ точка}$$

б) Ако  $A_1H \perp (B_1MN)$ ,  $H \in (B_1MN)$  и

$NQ \perp (ABB_1)$ ,  $Q \in (ABB_1)$ , то

$$V_{MNB_1A_1} = \frac{1}{3} S_{MNB_1} \cdot A_1H = \frac{1}{3} S_{A_1B_1M} \cdot NQ$$

$$A_1M = MB_1 = B_1N, MN = A_1B_1 = 1$$

$$\Rightarrow \triangle MNB_1 \cong \triangle A_1B_1M \Rightarrow A_1H = NQ$$

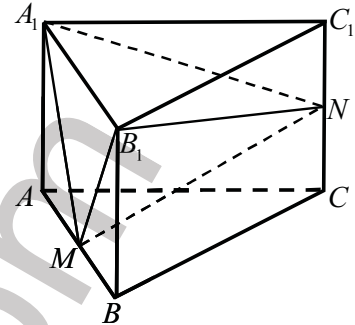
$$CC_1 \parallel (ABB_1) \Rightarrow NQ = CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1 точка

1 точка

1 точка

1 точка



3. Дадена е функцията  $f(x) = (-2x - 2)^{\frac{1}{3}} + (x + 1)^{\frac{1}{2}}$ .

а) Намерете най-малката стойност на функцията;

3 точки

б) За кои стойности на параметъра  $a$  уравнението  $(-2x - 2)^{\frac{1}{3}} + (x + 1)^{\frac{1}{2}} = a$  има единствено решение?

4 точки

а) Дефиниционното множество на функцията е  $x \in [-1; +\infty)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{3}(-2x - 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) + \frac{1}{2}(x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3(x + 1)^{\frac{1}{6}} - 2\sqrt{2}}{6(x + 1)^{\frac{2}{3}}}. \quad 1 \text{ точка}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)^{\frac{1}{6}} > \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow x > \frac{2^8}{3^6} - 1. \quad 1 \text{ точка}$$

Следователно при  $x \in \left[-1; \frac{2^8}{3^6} - 1\right)$  функцията намалява, а при  $x \in \left(\frac{2^8}{3^6} - 1; +\infty\right)$ , тя расте.

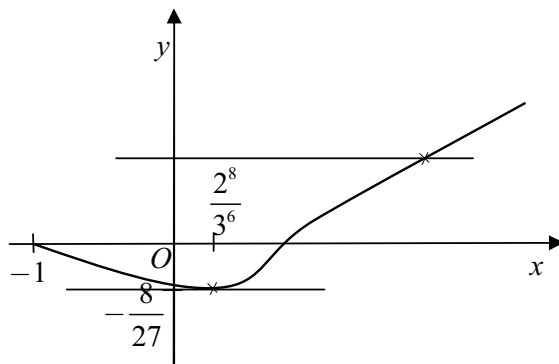
Следователно най-малката стойност на функцията е при  $x = \frac{2^8}{3^6} - 1$  и е равна на

$$f\left(\frac{2^8}{3^6} - 1\right) = -\frac{8}{27}. \quad 1 \text{ точка}$$

б) Като използваме изследването на функцията от подточка а) и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{x+1}} \right) = +\infty, \quad f(-1) = 0$$

1 точка



можем да заключим, че графиката на функцията ще изглежда приблизително, както е показано на чертежа: 1 точка

Следователно уравнението  $f(x) = a$  ще има

единствено решение при  $a \in (0; +\infty)$  1 точка

и  $a = -\frac{8}{27}$ . 1 точка

math-bg.com