Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

11. клас

1. Сборът на три различни числа е 21. Намерете тези числа, ако те са едновременно:

а) последователни членове на геометрична прогресия и съответно първи, десети и двадесет и осми член на аритметична прогресия;

3 точки

б) първи, десети и двадесет и осми член на аритметична и геометрична прогресия. **4 точки**

2. Членовете на геометричната прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са различни положителни числа.

а) Ако със S_n е означен сборът на първите n члена на дадената прогресия, докажете, че за всяко естествено число n е в сила равенството $\dfrac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\dfrac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}$; **3 точки**

б) Намерете произведението $a_1.a_2.a_3\ldots a_n$, ако

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=p$ и $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}=t$. **4 точки**

3. а) Ако $\alpha\neq 90^\circ+k180^\circ$ и $\alpha\neq\pm30^\circ+k180^\circ$ $(k\in\mathbb{Z})$, докажете, че $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(120^\circ+\alpha)=3\operatorname{tg}3\alpha$. **3 точки**

б) Намерете стойността на израза

$\operatorname{tg}54^\circ(\operatorname{tg}3^\circ+\operatorname{tg}13^\circ+\operatorname{tg}23^\circ+\ldots+\operatorname{tg}163^\circ+\operatorname{tg}173^\circ)$. **4 точки**

11. клас

1. Сборът на три различни числа е 21. Намерете тези числа, ако те са едновременно:

а) последователни членове на геометрична прогресия и съответно първи, десети и двадесет и осми член на аритметична прогресия; **3 точки**

б) първи, десети и двадесет и осми член на аритметична и геометрична прогресия. **4 точки**

Нека числата са a, $a+9d$ и $a+27d$. ($d \neq 0$)

а) a и d са решения на системата $\begin{vmatrix} a+a+9d+a+27d=21 \\ (a+9d)^2 = a(a+27d) \end{vmatrix}$. 2 точки

Решения на системата ($d \neq 0$) са $d=\frac{1}{3}, a=3$ и числата са 3, 6 и 12. 1 точка

б) Ако частното на геометричната прогресия е q $(q \neq 1)$, е изпълнено, че

$$\begin{vmatrix} a+9d = aq^9 \\ a+27d = aq^{27} \\ a+a+9d+a+27d=21 \end{vmatrix}.$$ 1 точка

От първите две уравнения получаваме $a(q^9-1)=9d$ и $a(q^{27}-1)=27d$. Като разделим почленно следва, че $\frac{q^{27}-1}{q^9-1}=3$. 1 точка

От тук намираме $q^9=-2$. 1 точка

Тогава $a+9d=-2a \Rightarrow a=-3d$ и от последното уравнение намираме $d=\frac{7}{9}, a=-\frac{7}{3}$.

Следователно числата са $-\frac{7}{3}, \frac{14}{3}, \frac{56}{3}$. 1 точка

2. Членовете на геометричната прогресия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ са различни положителни числа.

а) Ако със S_n е означен сборът на първите n члена на дадената прогресия, докажете, че за всяко естествено число n е в сила равенството $\frac{S_n}{S_{2n}-S_n} = \frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}$;

3 точки

б) Намерете произведението $a_1.a_2.a_3...a_n$, ако $a_1+a_2+a_3+...+a_n=p$ и $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}=t$. **4 точки**

а) За изразени S_n, S_{2n}, S_{3n} 1 точка

За доказване на тъждеството 2 точки

б) $a_1.a_2.a_3...a_n = a_1^{\ n}.q^{1+2+...+n-1} = a_1^{\ n}.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 1 точка

$$\begin{cases} a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=p \\ \dfrac{1}{a_1}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{q^n}-1}{\dfrac{1}{q}-1}=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=p \\ \dfrac{q^n-1}{a_1(q-1)q^{n-1}}=t \end{cases}$$

1 точка

След почленно деление получаваме $a_1^{\ 2}.q^{n-1}=\dfrac{p}{t}$.

1 точка

Следователно $a_1^{\ 2n}.q^{n(n-1)}=\left(\dfrac{p}{t}\right)^n$ и $a_1.a_2.a_3...a_n=a_1^{\ n}.q^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sqrt{\dfrac{p^n}{t^n}}$.

1 точка

3. а) Ако $\alpha\neq 90^\circ+k180^\circ$ и $\alpha\neq\pm30^\circ+k180^\circ$ $(k\in\mathbb{Z})$, докажете, че $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(120^\circ+\alpha)=3\operatorname{tg}3\alpha$.

3 точки

б) Намерете стойността на израза

$\operatorname{tg}54^\circ(\operatorname{tg}3^\circ+\operatorname{tg}13^\circ+\operatorname{tg}23^\circ+...+\operatorname{tg}163^\circ+\operatorname{tg}173^\circ)$.

4 точки

а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(120^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\sin(180^\circ+2\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)\cos(120^\circ+\alpha)}=$

$=\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{2\sin2\alpha}{\cos(180^\circ+2\alpha)+\cos60^\circ}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{4\sin2\alpha}{1-2\cos2\alpha}=$

$=\dfrac{\sin\alpha-2\sin\alpha\cos2\alpha-4\sin2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-2\cos\alpha\cos2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-\sin3\alpha+\sin\alpha-2\sin3\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha-\cos\alpha}=3\operatorname{tg}3\alpha$

3 точки

б) Прилагаме тъждеството от подточка а):

$\operatorname{tg}3^\circ+\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}123^\circ=3\operatorname{tg}9^\circ$

$\operatorname{tg}13^\circ+\operatorname{tg}73^\circ+\operatorname{tg}133^\circ=3\operatorname{tg}39^\circ$

....

$\operatorname{tg}53^\circ+\operatorname{tg}113^\circ+\operatorname{tg}173^\circ=3\operatorname{tg}159^\circ$

1 точка

Тогава $\operatorname{tg}54^\circ(\operatorname{tg}3^\circ+\operatorname{tg}13^\circ+\operatorname{tg}23^\circ+...+\operatorname{tg}163^\circ+\operatorname{tg}173^\circ)=$

$=3\operatorname{tg}54^\circ(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}69^\circ+\operatorname{tg}129^\circ+\operatorname{tg}39^\circ+\operatorname{tg}99^\circ+\operatorname{tg}159^\circ)=$

1 точка

$=9\operatorname{tg}54^\circ(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}117^\circ)=$

1 точка

$=9\operatorname{tg}54^\circ(\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{cotg}27^\circ)=9\operatorname{tg}54^\circ\dfrac{\sin^2 27^\circ-\cos^2 27^\circ}{\sin27^\circ\cos27^\circ}=9\dfrac{\sin54^\circ}{\cos54^\circ}\cdot\dfrac{-2\cos54^\circ}{\sin54^\circ}=-18$

1 точка