Общински кръг на LVIII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2009 година – София

10. клас

1. Решете системата $\begin{vmatrix} x^4-6x^2-7>0 \\ \dfrac{4x-9}{x-2}\geq x \end{vmatrix}$ и проверете дали числото

$a=\dfrac{3^{\frac{3}{4}}-3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}}-\sqrt[4]{3^5}+1$ е решение на системата. **7 точки**

2. а) Намерете най-голямата и най-малката стойности на функцията $y=-3x^2+2x-4$, когато x се изменя в интервала $[-1;1]$.

4 точки

б) Намерете стойностите на параметъра a, за които неравенството $-3x^2+2x-a^2+4a-\dfrac{10}{3}\leq 0$ е изпълнено за всички стойности на x от интервала $[-1;1]$. **3 точки**

3. Дадено е уравнението $(m+1)4^{-|x+2|}-m2^{1-|x+2|}+3m-1=0$.
Намерете стойностите на параметъра m, за които уравнението:

а) има решение; **4 точки**

б) има точно един неотрицателен корен. **3 точки**

<u>***10. клас***</u>

1. Решете системата $\left|\begin{array}{l} x^4-6x^2-7>0 \\ \dfrac{4x-9}{x-2}\ge x \end{array}\right.$ и проверете дали числото $a=\dfrac{3^{\frac{3}{4}}-3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}}-\sqrt[4]{3^5}+1$ е решение на системата. **7 точки**

Намерени:

решения на първото неравенство $x\in\left(-\infty;-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7};+\infty\right)$; 1,5 точки

решения на второто неравенство $x\in(-\infty;2)\cup\{3\}$; 1,5 точки

решенията на системата $x\in\left(-\infty;-\sqrt{7}\right)\cup\{3\}$; 1 точка

Забележка: Ако числото 3 не е включено в решенията на системата, да се отнемат 0,5 точки.

$$a=\frac{3^{\frac{1}{4}}\left(3^{\frac{2}{4}}-1\right)}{3^{\frac{1}{4}}\left(3^{\frac{1}{4}}+1\right)}-3\sqrt[4]{3}+1=\frac{\left(3^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(3^{\frac{1}{4}}+1\right)}{\left(3^{\frac{1}{4}}+1\right)}-3\sqrt[4]{3}+1=-2\sqrt[4]{3};$$ 2 точки

$-2\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{48}>-\sqrt[4]{49}=-\sqrt{7}\Rightarrow$ a не е решение на системата. 1 точка

2. а) Намерете най-голямата и най-малката стойности на функцията $y=-3x^2+2x-4$, когато x се изменя в интервала $[-1;1]$. **4 точки**

б) Намерете стойностите на параметъра a, за които неравенството $-3x^2+2x-a^2+4a-\dfrac{10}{3}\le 0$ е изпълнено за всички стойности на x от интервала $[-1;1]$. **3 точки**

а) Намерени:

абсцисата на върха на параболата $x_0=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}$; 1 точка

най-голямата стойност на функцията в интервала $[-1;1]$ $y_{\max}=y\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{11}{3}$; 1 точка

най-малката стойност на функцията в интервала $[-1;1]$ $y_{\min}=y(-1)=-9$. 2 точки

б) За всяко $x\in[-1;1]$ е изпълнено, че $y\le y_{\max}=-\dfrac{11}{3}$. 1 точка

$-3x^2+2x-a^2+4a-\dfrac{10}{3}\le 0\Leftrightarrow y\le a^2-4a-\dfrac{2}{3}$; 1 точка

Последното неравенство ще е вярно за всяко $x\in[-1;1]$, ако

$a^2-4a-\dfrac{2}{3}\ge-\dfrac{11}{3}\Leftrightarrow a\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. 1 точка

3. Дадено е уравнението $(m+1)4^{-|x+2|}-m2^{1-|x+2|}+3m-1=0$. Намерете стойностите на параметъра *m*, за които уравнението:

а) има решение; **4 точки**

б) има точно един неотрицателен корен. **3 точки**

а) Полагаме $2^{-|x+2|}=t, t\in(0;1]$. Следователно търсим стойностите на параметъра, за които уравнението $(m+1)t^2-2mt+3m-1=0$ има решение в интервала $(0;1]$. 1 точка

1 сл. При $m=-1$, уравнението има единствен корен $t=2$, т.е. $m\neq-1$. 0,5 точки

2 сл. Уравнението има корени t_1 и t_2, такива, че $0<t_1\le t_2<1 \Leftrightarrow m\in\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$. 1 точка

3 сл. Уравнението има корени t_1 и t_2, точно един от които е в интервала $(0;1] \Leftrightarrow m\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

1 точка

4 сл. Непосредствено проверяваме, че при $m=\frac{1}{3}$ и $m=0$ уравнението има корен в интервала $(0;1]$, т.е. търсените стойности на параметъра са $m\in\left[0;\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$. 0,5 точки

Забележка: Ако е разгледано само $D\ge0$, да се дава 1 точка, ако е разгледано и t_1, t_2 положителни, да се дава още 1 точка.

б) Уравнението $|x+2|=a$ при $a\ge0$ има корени $x_1=a-2$ и $x_2=-a-2$, като точно един от тях е неотрицателен при $a\ge2$. Следователно на $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$ съответства един неотрицателен и един отрицателен корен, а на $t\in\left(\frac{1}{4};1\right]$ – два отрицателни корена, т.е. търсим стойностите на параметъра *m*, за които уравнението $(m+1)t^2-2mt+3m-1=0$ има точно един корен в интервала $\left(0;\frac{1}{4}\right]$. 1 точка

1 сл. Уравнението има два корена t_1 и t_2, точно един от които е в интервала $\left(0;\frac{1}{4}\right] \Leftrightarrow$ $m\in\left(\frac{1}{3};\frac{15}{41}\right)$. Непосредствено се проверява, че $m=\frac{1}{3}$ не е решение, а $m=\frac{15}{41}$ е решение.

1 точка

2 сл. Уравнението има един двоен корен в интервала $\left(0;\frac{1}{4}\right]$. Проверява се, че в този случай няма решение.

Окончателно $m\in\left(\frac{1}{3};\frac{15}{41}\right]$. 1 точка