Общински кръг на LIX Републиканска олимпиада по математика
28 февруари 2010 година – София

11. клас

1. Намерете числата *a* и *b*, за които са изпълнени равенствата $2.2^3.2^5\dots2^{2a-1}=\dfrac{2}{16^{-2}}$ **и** $\sqrt{\lg\left(91+3^{\sqrt{\frac{b}{2}}}\right)}=\lg10^{\sqrt{2}}$. **Намерете сбора на всички несъкратими обикновени дроби със знаменател 5, принадлежащи на интервала** $\left(a^2;b^2\right)$. **7 точки**

2. а) Редицата *x*, *y*, *z* е геометрична прогресия, а редицата $\dfrac{1}{x+10},\dfrac{1}{y+10},\dfrac{1}{z+10}$ **– аритметична прогресия. Ако *x*, *y* и *z* са различни числа, намерете числото *y*.** **3 точки**

б) Дадена е редицата 4, 44, 444, ..., a_n**, ... с общ член** $a_n=\underbrace{44\dots4}_{n\text{ пъти}}$. **Докажете, че за всяко *n* стойността на израза** $a_n.10^n+2a_n+1$ **е квадрат на цяло число.** **4 точки**

3. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, за които уравненията $3^{2x}+3.6^x-2^{2x+2}=0$ **и** $4^x+|a|.2^x-(a+1).2^{-x}=0$ **са еквивалентни.** **7 точки**

УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ
11. клас

1. Намерете числата *a* и *b*, за които са изпълнени равенствата $2.2^3.2^5...2^{2a-1}=\dfrac{2}{16^{-2}}$ **и** $\sqrt{\lg\left(91+3^{\sqrt[b]{2}}\right)}=\lg 10^{\sqrt{2}}$**. Намерете сбора на всички несъкратими обикновени дроби със знаменател 5, принадлежащи на интервала** $\left(a^2;b^2\right)$**.** **7 точки**

Намерено: $a=3$ — 2 точки

$b=8$ — 2 точки

Търсеният сбор има вида

$$\left(9\frac{1}{5}+9\frac{2}{5}+9\frac{3}{5}+9\frac{4}{5}\right)+\left(10\frac{1}{5}+10\frac{2}{5}+10\frac{3}{5}+10\frac{4}{5}\right)+...+\left(63\frac{1}{5}+63\frac{2}{5}+63\frac{3}{5}+63\frac{4}{5}\right)=$$

$(4\,.\,9+2)+(4\,.\,10+2)+(4\,.\,11+2)+..........+(4\,.\,63+2)$ — 1 точка

Намерен сбора, равен на 8030 — 2 точки

2. а) Редицата *x*, *y*, *z* е геометрична прогресия, а редицата $\dfrac{1}{x+10},\dfrac{1}{y+10},\dfrac{1}{z+10}$ **– аритметична прогресия. Ако *x*, *y* и *z* са различни числа, намерете числото *y*.** **3 точки**

б) Дадена е редицата 4, 44, 444, ..., a_n**, ... с общ член** $a_n=\underbrace{44...4}_{n\text{ пъти}}$**. Докажете, че за всяко *n* стойността на израза** $a_n.10^n+2a_n+1$ **е квадрат на цяло число.** **4 точки**

а) Получено $y^2=xz$ (или записани като x, xq, xq^2) — 0,5 точки

$$\frac{2}{y+10}=\frac{1}{x+10}+\frac{1}{z+10}$$ — 0,5 точки

$(10-y)(x+z-2y)=0$ или $x(xq-10)(q-1)^2=0$ — 1,5 точки

Намерено $y=10$ — 0,5 точки

б) Намерено: $a_n=\dfrac{4}{9}\left(10^n-1\right)$ — 2 точки

$$a_n.10^n+2a_n+1=\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2$$ — 1 точка

$\dfrac{2.10^n+1}{3}$ е цяло число, защото $2.10^n+1=2\underbrace{00...0}_{n-1\text{ пъти}}1$ и се дели на 3 ($\dfrac{2.10^n+1}{3}=\underbrace{66...6}_{n-1\text{ пъти}}7$) — 1 точка

3. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, за които уравненията $3^{2x}+3.6^x-2^{2x+2}=0$ **и** $4^x+|a|.2^x-(a+1).2^{-x}=0$ **са еквивалентни.** **7 точки**

За намерено: първото уравнение има единствен корен $x=0$ — 3 точки

$x=0$ е корен на второто уравнение, когато $|a|=a$, т.е. $a\geq 0$ — 1 точка

При $a\geq 0$ второто уравнение е еквивалентно на $8^x+a.4^x-a-1=0$

За полагане $2^x=t>0$ и получено $(t-1)\left(t^2+(a+1)t+a+1\right)=0$ — 1 точка

За разгледани: 1 случай: $D<0\Leftrightarrow a\in(-1;3)$, но $a\geq 0\Rightarrow a\in[0;3)$ — 1 точка

2 случай: $\begin{cases} D\geq 0 \\ t_1+t_2<0 \Leftrightarrow a\in[3;+\infty) \\ t_1t_2\geq 0 \end{cases}$ — 1 точка

Окончателно при $a\geq 0$ второто уравнение има единствен корен $x=0$ и уравненията са еквивалентни.

Забележка: Може да се съобрази, че при $a\geq 0$ уравнението $t^2+(a+1)t+a+1=0$ не може да има положителен корен, т.к. ако $t>0$, то $(a+1)t>0$. Освен това $t^2>0$ и $a+1>0$. Тогава $t^2+(a+1)t+a+1>0$ за $t>0$ и $a\geq 0$.