МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул.”В.Левски” 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

59-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.
IX клас

1зад. Дадено е уравнението $x^2+px+q=0$ с корени α и β. Намерете коефициентите p и q и корените на уравнението α и β, ако $\boldsymbol{\alpha+1}$ и $\boldsymbol{\beta+1}$ са корени на уравнението $x^2-p^2x+pq=0$.

7 точки

2зад. В триъгълника ABC дължината на медианата BM е равна на страната AC. На продълженията на страните BA и AC са избрани съответно точки D и E, така че са изпълнени равенствата $AD = AB$ и $CE = CM$. Докажете, че правите DM и BE са перпендикулярни.

7 точки

3зад. а) Да се реши уравнението $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

б) Да се реши системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2\\[2mm]\dfrac{1}{xy}-xy=\dfrac{9}{20}\end{array}\right.$

7 точки

Време за работа – 4 часа ***Желаем Ви успех!***

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

59[-та] НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

IX клас

1зад. Прилагане на формулите на Виет за уравнението $x^2+px+q=0:\alpha+\beta=-p$ и $\alpha.\beta=q$ *1 точка*

Прилагане на формулите на Виет за уравнението $x^2-p^2x+pq=0:\alpha+1+\beta+1=p^2$ и $(\alpha+1).(\beta+1)=pq$ *1 точка*

Намиране на $p_1=1$ или $p_2=-2$ *1,5 точки*

Намиране на q – всяко число при $p_1=1$ или $q=-1$ при $p_2=-2$ *1,5 точки*

Намиране на $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{1-4q}}{2}$ и $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{1-4q}}{2}$ при $p_1=1$, q – всяко число *1 точка*

Намиране на $\alpha=1+\sqrt{2}$ и $\beta=1-\sqrt{2}$ при $p_2=-2$, $q=-1$ *1 точка*

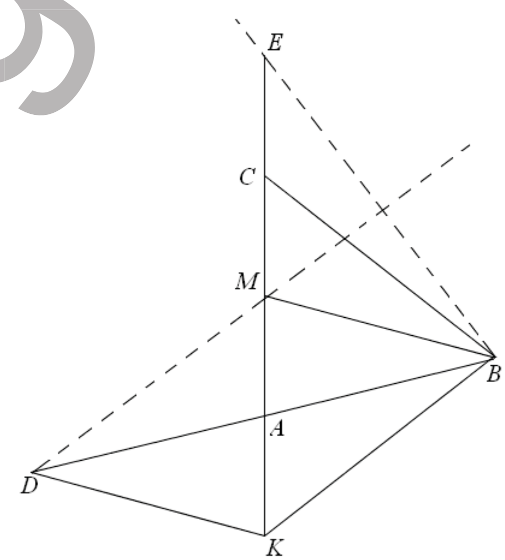
2зад. Определяне на точка K симетрична на M относно A. *1 точка*

ΔKBM – равнобедрен ($KM=BM$) и ΔEBM също е равнобедрен ($BM=EM$) *2 точки*

Ако означим $\angle BKM=\angle KBM=\alpha$, а $\angle BEM=\angle EBM=\beta$ от ΔKBE ще следва, че $\alpha+\beta=90^\circ$, т.е. $\angle KBE=90^\circ$ или $KB\perp BE$ *2 точки*

Четириъгълника $DKBM$ е успоредник (диагоналите му KM и BD се разполовяват) *1 точка*

$\Rightarrow DM \parallel KB \Rightarrow DM\perp BE$ *1 точка*



3зад. а) Полагане на $\sqrt{2x^2+3x+9}=y$, $y\ge 0$ *0,5 точки*

Получаване на уравнението $y^2-5y-6=0$ *0,25 точки*

Намиране на $y_1=6$ и $y_2=-1$ *0,5 точки*

Определяне, че $y_2=-1$ не е решение *0,5 точки*

Получаване на уравнението $2x^2+3x-27=0$ *0,25 точки*

Намиране на $x_1=3$ и $x_2=-\dfrac{9}{2}$ *0,5 точки*

Проверка че $x_1=3$ и $x_2=-\dfrac{9}{2}$ са корени на уравнението $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

0,5 точки

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

б) Получаване на $\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{1}{xy}-xy=\dfrac{9}{20}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}y-x=2xy\\ 20(xy)^2+9xy-20=0\end{array}\right., \left|\begin{array}{l}x\neq 0\\ y\neq 0\end{array}\right.$ *0,25 точки*

Полагане на $xy=z$ и получаване на уравнението $20z^2+9z-20=0$ *0,25 точки*

Решаване на уравнението $20z^2+9z-20=0$ и намиране на $z_1=\dfrac{4}{5}$ и $z_2=-\dfrac{5}{4}$ *1 точка*

Получаване на системите:

$\left|\begin{array}{l}xy=\dfrac{4}{5}\\ y-x=\dfrac{8}{5}\end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l}xy=-\dfrac{5}{4}\\ y-x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$ *0,5 точки*

Намиране на $\left|\begin{array}{l}x_1=\dfrac{2}{5}\\ y_1=2\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x_2=-2\\ y_2=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x_3=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\\ y_3=\dfrac{\sqrt{5}-5}{4}\end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l}x_4=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\\ y_4=\dfrac{-\sqrt{5}-5}{4}\end{array}\right.$ *2 точки*