МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

59-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.
XII клас

1зад. Да се намери границата: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-kx+3}$, ако стойността на k е равна на сумата $x+y$, където x и y са решенията на системата: $\begin{cases} 5-\sqrt{-6-y}=\sqrt{x+y} \\ \sqrt{x+y}+2=\sqrt{-3+x} \end{cases}$

7 точки

2зад. Околният ръб на наклонена триъгълна призма е 4 см. Страните на перпендикулярното на този ръб сечение се отнасят така, както 9:10:17, а лицето му е 144 см^2. Намерете лицето на околната повърхнина на призмата.

7 точки

3зад. Да се докаже, че ако $\alpha=\dfrac{\pi}{2^{n+1}-1}$, то $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\dfrac{1}{\sin 4\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\sin 2^n\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

7 точки

Време за работа – 4 часа ***Желаем Ви успех!***

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

59$^{\text{-та}}$ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

XII клас

1зад. Полагане $\sqrt{x+y}=a; \sqrt{-3+x}=b \Rightarrow \sqrt{-6-y}=\sqrt{b^2-a^2-3}$ — *1 точка*

$\left| \begin{array}{l} 5-\sqrt{b^2-a^2-3}=a \\ a+2=b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \sqrt{b^2-a^2-3}=5-a \\ a+2=b \end{array} \right.$ — *0,5 точки*

Определяне ДМ за a: $a<5$ и намиране на решенията $\left| \begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \end{array} \right.$ — *1,5 точки*

Намиране на x и y $\left| \begin{array}{l} \sqrt{x+y}=2 \\ \sqrt{-3+x}=4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=19 \\ y=-15 \end{array} \right.$ — *1 точка*

Намиране на $к=4$ и получаване на $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)}$ — *1 точка*

Преобразуване $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-3)}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$ — *1 точка*

Полагане на $y=x-1$. Ако x клони към 1, то y клони към 0 и получаване на
$-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=-\dfrac{1}{2}\cdot 1=-\dfrac{1}{2}$ — *1 точка*

2зад. Определяне на страните на перпендикулярното сечение *a=9x, в=10x и c=17x, x>0* — *1 точка*

Получаване на полупериметъра $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{9x+10x+17x}{2}=18x$ — *0,5 точки*

Изразяване на лицето на сечението и намиране на x
$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18x.9x.8x.x}=144 \Rightarrow x=2$ — *1,5 точки*

Намиране страните *a, в* и *c* на перпендикулярното на наклонения ръб l сечение
18 см, 20 см и 34 см — *1 точка*

От $l\perp(ABC)\Rightarrow l\perp AB, l\perp AC и\, l\perp BC$, (ABC) е равнината на сечението — *1,5 точки*

Лицето на околната повърхнина на призмата е сбор от лицата на три успоредника:
$S=l.AB+l.AC+l.BC=l.(a+b+c)=4.72=288$ см^2 — *1,5 точки*

3зад. Записване на тъждеството $\dfrac{1}{\sin 2x}=\cot gx-\cot g2x$ — *1 точка*

Заместване в тъждеството последователно $x=\alpha, 2\alpha, ..., 2^{n-1}\alpha$ и получаване на равенствата:

$\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\cot g\alpha-\cot g2\alpha$

Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

$$\frac{1}{\sin 4\alpha} = \cot g2\alpha - \cot g4\alpha$$

....

$$\frac{1}{\sin 2^n\alpha} = \cot g2^{n-1}\alpha - \cot g2^n\alpha$$ *1,5 точки*

Почленно събиране на равенствата и намиране

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + ... + \frac{1}{\sin 2^n\alpha} = \cot g\alpha - \cot g2^n\alpha$$ *1 точка*

$$\cot g\alpha - \cot g2^n\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2^n\alpha}{\sin 2^n\alpha} = \frac{\sin\left(2^n - 1\right)\alpha}{\sin\alpha.\sin 2^n\alpha}$$ *1,5 точка*

Заместване на $\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1} - 1}$ и получаване

$$\sin\left(2^n - 1\right)\alpha = \sin\frac{\left(2^n - 1\right)\pi}{2^{n+1} - 1} = \sin\left[\pi - \frac{\left(2^n - 1\right)\pi}{2^{n+1} - 1}\right] = \sin\frac{2^n.\pi}{2^{n+1} - 1} = \sin 2^n\alpha$$ *1 точка*

Получаване на $\frac{\sin\left(2^n - 1\right)\alpha}{\sin\alpha.\sin 2^n\alpha} = \frac{\sin 2^n\alpha}{\sin\alpha.\sin 2^n\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$ *1 точка*