

**59<sup>-та</sup> НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА**  
**ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.**  
**X клас**

**1зад.** Решете системата 
$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3 > 0 \\ \frac{5x-14}{x-1} \geq x-2 \end{cases}$$

**7 точки**

**2зад.** В правоъгълен триъгълник е вписана полуокръжност така, че центърът ѝ лежи на хипотенузата и я дели на отсечки с дължини 3 см и 4 см. Намерете катетите на триъгълника и радиуса на полуокръжността.

**7 точки**

**3зад.** Нека  $x_1$  и  $x_2$  са реални корени на уравнението  $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$ , където  $a$  е реален параметър и  $(x_1 - x_2)^2 - x_1 - x_2 = S$ . Да се намерят стойностите на параметъра  $a$ , за които  $S$  приема най-малка и най-голяма стойност и да се намерят тези екстремални стойности на  $S$ .

**7 точки**

*Време за работа – 4 часа*

*Желаем Ви успех!*

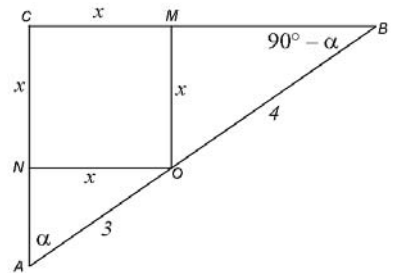
59-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА  
 ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

**X клас**

- 1зад.** Полагане на  $x^2 = y$  и намиране на  $y_1 = 3$  и  $y_2 = -1$  *1,5 точки*  
 Получаване на еквивалентно неравенство на  $x^4 - 2x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1) > 0$  *1 точка*  
 Намиране на решенията на  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1) > 0$   $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$  *1 точка*  
 Преобразуване  $\frac{5x-14}{x-1} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+16}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{x-1} \leq 0$  *1,5 точки*  
 Намиране на решенията на неравенството  $x \in (-\infty; 1) \cup \{4\}$  *1 точка*  
 Намиране на решенията на системата  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \{4\}$  *1 точка*

- 2зад.** Определяне на  $x = 3 \sin \alpha$  от  $\triangle AON$  *1 точка*  
 Определяне на  $x = 4 \sin(90^\circ - \alpha) = 4 \cos \alpha$  от  $\triangle BOM$  *1 точка*  
 Записване на уравнението  $3 \sin \alpha = 4 \cos \alpha$  и намиране на  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  и  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  *2 точки*  
 Намиране на радиуса на окръжността  $x = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ см}$  *1 точка*



- Намиране на катета  $BC = 7 \cdot \sin \alpha = \frac{28}{5} = 5,6 \text{ см}$  *1 точка*  
 Намиране на катета  $AC = 7 \cdot \cos \alpha = \frac{21}{5} = 4,2 \text{ см}$  *1 точка*

- 3зад.** Определяне, че уравнението  $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$  има реални корени при  $D = -a^2 + 6a - 8 \geq 0$  *1 точка*  
 Намиране решенията на неравенството  $-a^2 + 6a - 8 \geq 0$ ,  $2 \leq a \leq 4$  *1 точка*  
 Записване формулите на Виет за уравнението  $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$ :  
 $x_1 + x_2 = 2a$  и  $x_1 x_2 = 2a^2 - 6a + 8$  *1 точка*  
 $S = (x_1 - x_2)^2 - x_1 - x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = -4a^2 + 22a - 32$  *1 точка*  
 Намиране на най-малка стойност на  $S$  при  $a = 4$  и  $S_{\min} = -8$  *1,5 точки*  
 Намиране на най-голямата стойност на  $S$  при  $a = \frac{11}{4}$  и  $S_{\max} = -\frac{7}{4}$  *1,5 точки*