МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ПЛОВДИВ

4000 Пловдив, ул.”Цариброд” № 1, тел.: 032/631-843, 032/628-980, факс: 032/631-847,www.rio-plovdiv.com, e-mail: info@rio-plovdiv.com

Общински кръг на олимпиадата по математика - 28.02.2010.

12 клас

Задача 1

а) Да се определи броят на корените на уравнението $b=\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+11}$ в зависимост от стойността на реалния параметър b.

б) Да се реши уравнението $3^{\left|1-4x^2\right|}=\sin \pi x$.

в) Да се докаже, че $\cos\dfrac{3}{6-x}<0$, ако $3x^2-31x+80<0$.

(7 точки)

Задача 2

В равнобедрен трапец с остър ъгъл α може да се впише окръжност. Изпълнено е равенството $\dfrac{R}{r}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, където R и r са радиуси съответно на описаната и на вписаната в трапеца окръжности.

а) Да се намери големината на ъгъл α

б) Ако $\alpha=60^\circ$ и бедрата на трапеца са 2m , където m е реален параметър, да се намери разстоянието между центровете на вписаните окръжности в триъгълниците, на които трапеца е разделен от един от диагоналите си.

(7 точки)

Задача 3

Даден е правилен тетраедър ABCD, на който всички ръбове са равни на 1. Точка M е среда на AB. През точка M успоредно на BD или минаваща през BD е прекарана равнина. Да се намери лицето на това сечение на тетраедъра с така прекараната равнина, което има най-голям периметър.

(7точки)

Време за работа - 4 часа.

Желаем Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА – 12 клас

Задача 1

а) Доказване, че функцията $f(x)=\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+11}$ е дефинирана, непрекъсната и растяща за всяко $x \geq \frac{5}{3}$ $\rightarrow$ 2 точки

Извод, че при $b \geq 4$ има 1 решение; при $b<4$ няма решения $\rightarrow$ 1 точка

б) Оценяване двете страни на уравнението:

оценка, че $3^{\left|1-4x^2\right|} \geq 1$, като равенство се получава при $x=\pm\frac{1}{2}$;

оценка, че $\sin \pi x \leq 1$ $\rightarrow$ 1 точка

Решенията уравнението са решенията на системата $\left|\begin{array}{l} 3^{\left|1-4x^2\right|}=1 \\ \sin \pi x=1 \end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ 1 точка

в) Извод, че от $5<x<\frac{16}{3} \Rightarrow 3<\frac{3}{6-x}<\frac{9}{2}$ $\rightarrow$ 1 точка

Доказване, че $\cos\frac{3}{6-x}<0$ $\rightarrow$ 1 точка

Задача 2

а) Намиране на ъгъл $\alpha=60^{\circ}$ $\rightarrow$ 3 точки

б) Доказване, че двете окръжности се допират външно $\rightarrow$ 1 точка

Намиране на двата радиуса $r_1=\frac{3\sqrt{3}\,l}{5+\sqrt{7}}$, $r_2=\frac{\sqrt{3}\,l}{3+\sqrt{7}}$, $r_1+r_2=l\frac{\sqrt{3}}{3}(7-2\sqrt{7})$ $\rightarrow$ 3 точки

Задача 3

Ако равнината пресича BC в точка N и $BN=x$, където $x\in[0;1]$ и за периметъра се получи

$$p(x)=\begin{cases} 3 & ,x=0 \\ \sqrt{4x^2-2x+1}-x+\frac{3}{2} & ,0<x\leq 1 \end{cases} \quad \rightarrow 4 \text{ точки}$$

Доказване, че $p'(x)=0$, $x=\frac{1}{2}$ и $p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}<3$ $\rightarrow$ 2 точки

$\max p(x)=3$ при $x=0$ и пресмятане лицето на сечението $\rightarrow$ 1 точка