МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

X клас

Зад.1 Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Решете неравенството $x+b+28a\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}$, където a и b са съответно най-голямата и най-малката стойност на функцията
$y=-2x^2+4x+1$ в интервала [-3;0].

(7 точки)

Зад.3 Права, минаваща през точката A, пресича окръжност в точките B и C точката (B лежи между точките A и C). Друга права, минаваща през точката A, пресича окръжността в точките D и E (точката D лежи между точките A и E). Известно е, че правите BD и CE се пресичат в точката F, освен това FE=1 и AC=2AE.

а) Да се докаже, че $\measuredangle$EDF=$\measuredangle$BCF.

б) Да се намери дължината на отсечката FD.

(7 точки)

Време за работа - 4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

Указание за проверка
IX клас

Зад.1 Дефиниционното множество на първото уравнение е $D: x \neq -\frac{1}{3}$.

$$(1)\ \frac{x}{27x^3+1}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{(3x+1)(9x^2-3x+1)}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow$$

$$(3x-1)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\in D$$

(2 точки)

Дефиниционното множество на второто уравнение е $D: y \neq \pm 2$.

$$(2)\ \frac{13y^2+4}{4-y^2}+\frac{7y}{y-2}=0 \Leftrightarrow \frac{13y^2+4}{(2-y)(2+y)}-\frac{7y}{2-y}=0 \Rightarrow$$

$$3y^2-7y+2=0 \Rightarrow y_1=\frac{1}{3}\in D, y_2=2\notin D$$

(2 точки)

Решенията на уравнението (3) $9z^4-37z^2+4=0$ са $z_1=\pm\frac{1}{3}, z_2=\pm 2$

(2 точки)

$\Rightarrow$ еквивалентни са уравненията (1) и (2) **(1 точка)**

Зад.2

Допустимите стойности на параметъра *к* са всички реални числа, различни от $-\frac{1}{2}$,

D>0

(1 точка)

От формулите на Виет следва, че $x_1x_2=\frac{k-1}{2k+1}$ и $x_1+x_2=\frac{k+2}{2k+1}$.

(2 точки)

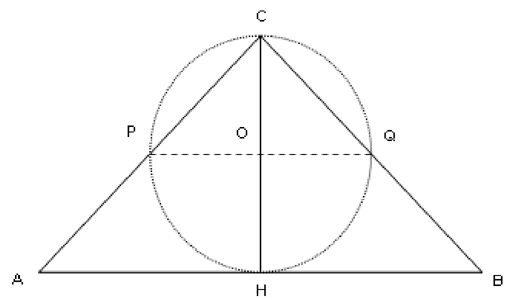
$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$x_1x_2((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow \frac{k-1}{2k+1}\left(\left(\frac{k+2}{2k+1}\right)^2-\frac{2(k-1)}{2k+1}\right)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$$

$$\Rightarrow 9k^2-3k=0 \Rightarrow k=0, k=\frac{1}{3}$$ - допустими стойности.

(4 точки)

Зад.3



а) По условие $CH = 2R$ и $PQ = CH \Rightarrow PQ = 2R \Rightarrow \measuredangle ACB = \measuredangle PCQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$ е правоъгълен **(2 точки)**.

б) От ΔABC-правоъгълен $\Rightarrow r = p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$ **(1 точка)**.

По условие $\frac{P_{ABC}}{r} = 4\sqrt{3} + 6 \Rightarrow \frac{a+b+c}{\frac{a+b-c}{2}} = 4\sqrt{3} + 6$

$$\Rightarrow 2(a+b) + 2c = \left(4\sqrt{3}+6\right)(a+b) - \left(4\sqrt{3}+6\right)c \Rightarrow \left(4\sqrt{3}+4\right)(a+b) = \left(4\sqrt{3}+8\right)c$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{4\sqrt{3}+8}{4\sqrt{3}+4} \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **(4 точки)**.