

58^{-ма} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

IX клас

1зад. а) Да се определи реалният параметър k така, че корените на уравнението $x^2 - 5x + k = 0$ да удовлетворяват зависимостта $x_1^3 + x_2^3 = 215$;

б) За намерената стойност на k да се реши уравнението: $x^2 + \frac{k}{x^2} = 5$.

7 точки

2зад. Да се намерят мерките на ъглите на триъгълник $\triangle ABC$, ако центровете O_1 и O съответно на вписаната и описаната около него окръжности са симетрични относно AB .

9 точки

3зад. а) Докажете, че ако $ab + bc + ca = 1$, то

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

5 точки

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4 часа.

Желаем Ви успех!

58^{-ма} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНИЯ
IX клас

- 1зад. а)** $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 215$ 1 точка
 Определяне от формулите на Виет $x_1 + x_2 = 5$ и $x_1x_2 = k$ 1 точка
 Заместване $5(25 - 3k) = 215$ и намиране на $k = -6$ 1 точка
б) Определяне на ДС $x \neq 0$ 0,5 точки
 Преобразуване на $x^2 + \frac{k}{x^2} = 5$ и достигане до $x^4 - 5x^2 + k = 0$ 1,5 точки
 Заместване на k с -6 и решение на уравнението $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$
 $x_1 = \sqrt{6}$ и $x_2 = -\sqrt{6}$ 2 точки

- 2зад.** За доказване, че $\triangle ABC$ е равнобедрен 2 точки
 AO_1 е ъглополовяща, следователно $\angle CAO_1 = \angle O_1AB = \alpha$ 1 точка

От свойството на осевата симетрия следва, че
 $\angle BAO_1 = \angle BAO = \alpha$ 1 точка

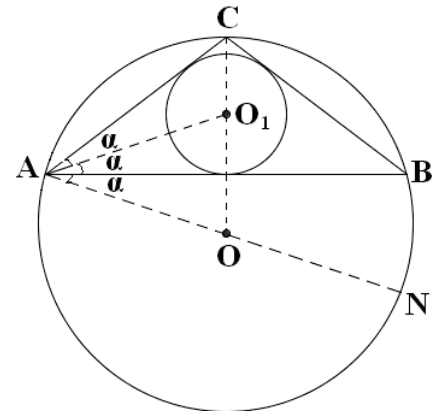
Тогава $\angle NAC = 3\alpha = \frac{1}{2}CB\hat{N}$, откъдето $CB\hat{N} = 6\alpha$ 1 точка

$\angle ABC = \angle BAC = 2\alpha = \frac{1}{2}A\hat{C}$ (от $\triangle ABC$ равнобедрен),

следователно дъгата AB е 4α 1 точка

Тогава $A\hat{N} = A\hat{C} + CB\hat{N} = 4\alpha + 6\alpha = 10\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 18^\circ$
1 точка

Следователно $\angle ABC = \angle BAC = 2\alpha = 36^\circ$
 $\angle ACB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ 2 точки



- 3зад.** $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{a(1-b^2)(1-c^2) + b(1-a^2)(1-c^2) + c(1-a^2)(1-b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} =$ 2 точки
 $= \frac{a-ab^2-ac^2+ab^2c^2+b-ba^2-bc^2+ba^2c^2+c-ca^2-cb^2+ca^2b^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} =$
 $= \frac{a(1-ab-ca)+b(1-ab-bc)+c(1-ca-bc)+abc(bc+ac+ab)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} =$ 2 точки
 $= \frac{abc+bac+cab+abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$ 1 точка