РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

LVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ
29 - 30 май 2009 г.

Тема за 9. – 10. – 11. и 12. клас

Задача 1. Естествените числа a и b са такива, че $a > b > 1$ и уравнението

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = \frac{b^y - 1}{b - 1}$$

има поне две различни решения в естествени числа $x > 1$ и $y > 1$. Да се докаже, че числата a и b са взаимнопрости.

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е с център I и допира страните му BC, AC и AB съответно в точки A_1, B_1 и C_1. През I е построена права ℓ. Точките A', B' и C' са симетрични съответно на A_1, B_1 и C_1 относно ℓ. Да се докаже, че правите AA', BB' и CC' се пресичат в една точка.

Задача 3. През точките с целочислени координати в правоъгълна координатна система $Oxyz$ са построени равнини, успоредни на координатните равнини и по този начин пространството е разбито на единични кубчета. Да се намерят всички тройки (a, b, c), $a \leq b \leq c$, от естествени числа, за които кубчетата могат да бъдат оцветени в abc цвята така, че всеки паралелепипед с размери $a \times b \times c$, целочислени върхове и стени, успоредни на координатните равнини, не съдържа еднакво оцветени кубчета.

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число. Да се намерят всички неконстантни полиноми с реални коефициенти $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, за които

$$f_k(x)f_{k+1}(x) = f_{k+1}(f_{k+2}(x)), 1 \leq k \leq n$$

за всяко реално число x (като $f_{n+1}(x) \equiv f_1(x)$ и $f_{n+2}(x) \equiv f_2(x)$).

Задача 5. Изпъкнал 2009-ъгълник е разбит на триъгълници чрез непресичащи се диагонали. Един от тези диагонали е оцветен в зелено. Разрешена е следната операция: за два триъгълника ABC и BCD от разбиването с обща страна BC можем да заменим диагонала BC с диагонала AD, като, ако замененият диагонал е бил зелен, той губи цвета си и заменилият го диагонал става зелен. Да се докаже, че всеки предварително избран диагонал на 2009-ъгълника може да бъде оцветен в зелено чрез прилагане на разрешената операция краен брой пъти.

Задача 6. Да се докаже, че ако $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ са произволни реални числа, а $c_1, \ldots, c_n$ са положителни реални числа, то

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{c_i + c_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{b_i b_j}{c_i + c_j}\right) \geq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{c_i + c_j}\right)^2.$$