Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, 29-30 май 2009 г.

Задача 1. Естествените числа a и b са такива, че $a > b > 1$ и уравнението

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = \frac{b^y - 1}{b - 1}$$

има поне две различни решения в естествени числа $x > 1$ и $y > 1$. Да се докаже, че числата a и b са взаимнопрости.

Решение. Да допуснем, че a и b не са взаимнопрости и нека p е техен общ прост делител. Ще означаваме с $v_p(n)$ точната степен на p, която дели естественото число n. Да отбележим, че $(n, \frac{n^\ell - 1}{n-1}) = 1$ за всяко естествено $n > 1$ и p не дели $n - 1$, ако дели n.

Нека даденото уравнение има решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2), като можем да считаме, че $x_1 > x_2$. От равенството $\dfrac{a^{x_1} - 1}{a - 1} = \dfrac{b^{y_1} - 1}{b - 1}$ получаваме $ba^{x_1} - ab^{y_1} + a - b = a^{x_1} - b^{y_1}$ и оттук лесно следва, че $v_p(a) = v_p(b)$.

Да извадим почленно равенствата $\dfrac{a^{x_1} - 1}{a - 1} = \dfrac{b^{y_1} - 1}{b - 1}$ и $\dfrac{a^{x_2} - 1}{a - 1} = \dfrac{b^{y_2} - 1}{b - 1}$. Получаваме $a^{x_2}\dfrac{a^{x_1 - x_2} - 1}{a - 1} = b^{y_2}\dfrac{b^{y_1 - y_2} - 1}{b - 1}$, откъдето $x_2 v_p(a) = y_2 v_p(b)$ и значи $x_2 = y_2$. Тогава от $\dfrac{a^{x_2} - 1}{a - 1} = \dfrac{b^{x_2} - 1}{b - 1}$ очевидно следва $a = b$, което противоречи на условието.

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е с център I и допира страните му BC, AC и AB съответно в точки A_1, B_1 и C_1. През I е построена права ℓ. Точките A', B' и C' са симетрични съответно на A_1, B_1 и C_1 относно ℓ. Да се докаже, че правите AA', BB' и CC' се пресичат в една точка.

Решение. Да означим разстоянието от точката X до правата AB с $d_c(X)$. Аналогично означение въвеждаме и за правите BC и CA. Не е трудно да се види, че от синусовия вариант на теоремата на Чева следва, че равенството

$$\frac{d_b(A')}{d_c(A')} \cdot \frac{d_c(B')}{d_a(B')} \cdot \frac{d_a(C')}{d_b(C')} = 1$$

е необходимо и достатъчно условие за пресичане в една точка на правите AA', BB' и CC'.

Да забележим, че $B_1A' = A_1B'$. Освен това, понеже правите CB и CA допират вписаната окръжност, $\sphericalangle B'A_1B = \frac{1}{2}\widehat{B'A_1} = \frac{1}{2}\widehat{A'B_1} = \sphericalangle A'B_1C$. Оттук $d_a(B') = A_1B' \sin \sphericalangle B'A_1B = B_1A' \sin \sphericalangle A'B_1C = d_b(A')$. Аналогично получаваме и $d_b(C') = d_c(B')$ и $d_c(A') = d_a(C')$, с което исканото равенство е доказано.

Задача 3. През точките с целочислени координати в правоъгълна координатна система $Oxyz$ са построени равнини, успоредни на координатните равнини и по този начин пространството е разбито на единични кубчета. Да се намерят всички тройки (a, b, c), $a \leq b \leq c$, от естествени числа, за които кубчетата могат да бъдат оцветени в abc цвята така, че всеки паралелепипед с размери $a \times b \times c$, целочислени върхове и стени, успоредни на координатните равнини, не съдържа еднакво оцветени кубчета.

Решение. Ще докажем, че търсените тройки (a, b, c) са онези, за които a дели b и b дели c. С $((x_0, y_0, z_0), p, q, r)$ ще означаваме паралелепипед с долен ляв връх с координати (x_0, y_0, z_0) и измерения p, q и r, съответно по осите Ox, Oy и Oz.

Да допуснем, че b не се дели на a, т.е. $b = ma + n$ за някои $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < n < a$. Ако (p, q, r) е пермутация на числата (a, b, c), то от условието на задачата, приложено за паралелепипедите $((0, 0, 0), p, q, r)$ и $((0, 0, 1), p, q, r)$ следва, че паралелепипедите $((0, 0, 0), p, q, 1)$ и $((0, 0, r), p, q, 1)$ са съставени от кубчета с едни и същи цветове.

Оттук следва, че паралелепипедите $((0, 0, 0), c, a, 1)$ и $((0, 0, b), c, a, 1)$ са съставени от кубчета с едни и същи цветове и паралелепипедите $((0, 0, 0), c, b, 1)$ и $((0, 0, ma), c, b, 1)$ са съставени от кубчета с едни и същи цветове.

Тъй като паралелепипедът $((0, 0, 0), c, b, 1)$ съдържа $((0, 0, 0), c, a, 1)$ и $((0, 0, ma), c, b, a)$ съдържа $((0, 0, ma), c, b, 1)$ и $((0, 0, b), c, a, 1)$, то всеки цвят от $((0, 0, 0), c, a, 1)$ се среща поне два пъти в $((0, 0, ma), c, b, a)$. Полученото противоречие показва, че $n = 0$, т.е. a дели b. Аналогично се доказва, че b дели c.

Нека сега $a|b$ и $b|c$, като $b = p_1 a$, $c = p_2 b = p_1 p_2 a$, където $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$.

За всеки две естествени числа m и n ще означаваме с $R(m, n)$ остатъка при деление на m на n. Координати на всяко кубче ще наричаме координатите на долния му ляв преден връх.

Да оцветим кубчето (x, y, z) в цвят, определен от остатъци по следния начин:

$$(R(x, a); R(y, a); R(z, a); R(\left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{y}{a}\right], p_1); R(\left[\frac{y}{a}\right] + \left[\frac{z}{a}\right], p_1); R(\left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{b}\right] + \left[\frac{z}{b}\right], p_2)).$$

Тогава преброяването на всички възможности по шестте координати показва, че общият брой на цветовете е $a^3 p_1 p_1 p_2 = abc$.

Да допуснем, че две различни едноцветни кубчета (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) са разположени в паралелепипед с размери $a \times b \times c$, т.е. $|x_1 - x_2| \leq \alpha$, $|y_1 - y_2| \leq \beta$, $|z_1 - z_2| \leq \gamma$, където (α, β, γ) е пермутация на (a, b, c). Тъй като $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$ и $|z_1 - z_2|$ се делят на a, една от тези разлики е равна на 0. Нека например $x_1 = x_2$. Тогава от четвъртата и петата координата на съответния цвят се вижда, че $|y_1 - y_2|$ и $|z_1 - z_2|$ се делят на b и значи една от тях е равна на 0. Ако например $y_1 = y_2$, то от последната координата следва, че $|z_1 - z_2|$ се дели на c, т.е. $z_1 = z_2$. Получихме, че $(x_1, y_1, z_1) \equiv (x_2, y_2, z_2)$, т.е. кубчетата съвпадат, противоречие.

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число. Да се намерят всички неконстантни полиноми с реални коефициенти $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, за които

$$f_k(x) f_{k+1}(x) = f_{k+1}(f_{k+2}(x)), 1 \leq k \leq n$$

за всяко реално число x (като $f_{n+1}(x) \equiv f_1(x)$ и $f_{n+2}(x) \equiv f_2(x)$).

Решение. Нека $\deg(f_k) = \alpha_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Навсякъде по-долу ще разглеждаме индексите по модул n.

От условието следват равенствата $\alpha_k + \alpha_{k+1} = \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}$, т.е. α_{k+1} дели α_k за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$. Следователно $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 2$.

Нека $f(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k$, $1 \le k \le n$, като $a_k \ne 0$. Сравнявайки коефициентите пред x^4 в дадените равенства, получаваме $a_k = a_{k+2}^2$, $1 \le k \le n$. Ако $n = 2m$ е четно число, то $a_1 = a_3^2 = a_5^{2^2} = \cdots = a_{2m-1}^{2^{m-1}} = a_1^{2^m}$ и следователно $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = 1$. Аналогично получаваме $a_2 = a_4 = \cdots = a_{2m} = 1$. Ако n е нечетно число, по същия начин получаваме $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Сравнявайки коефициентите пред x^3 в дадените равенства, получаваме $b_k + b_{k+1} = 2b_{k+2}$, $1 \le k \le n$. Нека $\min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = b_s := b$. Тогава от равенството $b_{s-2} + b_{s-1} = 2b_s$ следва, че $b_{s-2} = b_{s-1} = b$ и, продължавайки по същия начин, заключаваме, че $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$. Сега сравняваме коефициентите пред x^2 в дадените равенства и получаваме $c_k + c_{k+1} = 2c_{k+2} + b$, $1 \le k \le n$. Като съберем тези равенства, получаваме $nb = 0$, т.е. $b = 0$. Тогава същите разсъждения както по-горе показват, че $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$. Следователно $f(x) = x^2 + c$ и дадените равенства приемат вида $(x^2+c)(x^2+c) = (x^2+c)^2 + c$. Оттук $c = 0$ и $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = x^2$.

Задача 5. Изпъкнал 2009-ъгълник е разбит на триъгълници чрез непресичащи се диагонали. Един от тези диагонали е оцветен в зелено. Разрешена е следната операция: за два триъгълника ABC и BCD от разбиването с обща страна BC можем да заменим диагонала BC с диагонала AD, като, ако замененият диагонал е бил зелен, той губи цвета си и заменилият го диагонал става зелен. Да се докаже, че всеки предварително избран диагонал на 2009-ъгълника може да бъде оцветен в зелено чрез прилагане на разрешената операция краен брой пъти.

Решение. Първо ще докажем, че за даден връх на изпъкналия 2009-ъгълник и всяка триангулация, с прилагане на разрешената операция можем да получим триангулацията, получена от прекарването на всички диагонали през този връх. За произволен връх A, движейки се обратно на часовниковата стрелка, да означим с $B_1, B_2, \ldots, B_k$ последователните върхове, за които AB_i е страна на дадения многоъгълник или диагонал в дадената триангулация. Ако отсечката B_iB_{i+1} не е страна, тя е диагонал и след извършване на разрешената операция, ще получим нова триангулация от която излизащите от A диагонали са с един повече. Продължавайки по този начин ще получим триангулация с диагонали само от върха A.

Ще докажем по индукция по $n \ge 4$, че твърдението е вярно за произволен изпъкнал n-ъгълник. При $n = 4, 5$ твърдението се проверява директно. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое $k \ge 5$ и да разгледаме триангулация на изпъкнал $(k+1)$-ъгълник. Без ограничение приемаме, че избрания диагонал е A_1A_i. Съгласно доказаното, от дадената триангулация можем да получим триангулацията, получена с прекарването на всички диагонали през A_1. Ако при това A_1A_i е станал зелен, задачата е решена. Нека зелен е станал диагонала A_1A_j, като без ограничение считаме, че $j < i$. От индукционното допускане следва, че в многоъгълника $A_1A_2\ldots A_i$ можем да получим триангулация, в която диагоналът A_1A_{i-1} е зелен. Тъй като $k \ge 5$ и всяка триангулация на $(k+1)$-ъгълник съдържа $k-2$ диагонала, то в триангулацията освен диагоналите A_1A_{i-1} и A_1A_i има поне още един диагонал. Този диагонал разделя $(k+1)$-ъгълника на два изпъкнали многоъгълника, всеки с по-малко от $k+1$ върха, като диагоналите A_1A_{i-1} и A_1A_i са в един от двата многоъгълника. Остава да приложим индукционното допускане за този многоъгълник.

Задача 6. Да се докаже, че ако $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ са произволни реални числа, а $c_1, \dots, c_n$ са положителни реални числа, то

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{c_i + c_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{b_i b_j}{c_i + c_j}\right) \geq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{c_i + c_j}\right)^2.$$

Решение. Първо решение. Можем да считаме, че не всички a_i и не всички b_i са равни на 0. Първо ще докажем, че

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{c_i + c_j} x^{c_i + c_j} \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Имаме, че $xf'(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^{c_i}\right)^2 \geq 0$. Следователно $f(x) \geq f(0) = 0$ при $x \geq 0$.

Аналогично

$$g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{b_i b_j}{c_i + c_j} x^{c_i + c_j} \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Сега полагаме

$$h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{c_i + c_j} x^{c_i + c_j}.$$

Ще докажем по-общо неравенство от даденото, а именно

$$f(x)g(x) \geq h^2(x), \ x \geq 0.$$

Можем да считаме, че $h(x) \geq 0$ при дадено x (иначе сменяме a_i с $-a_i$). Тогава трябва да докажем, че $s(x) = \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} - h(x) \geq 0$. От неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$ при $x \geq 0$ следва, че

$$xs'(x) = \frac{xf'(x)\sqrt{g(x)}}{2\sqrt{f(x)}} + \frac{xg'(x)\sqrt{f(x)}}{2\sqrt{g(x)}} - xh'(x) \geq \sqrt{xf'(x)xg'(x)} - xh'(x)$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x^{c_i} \sum_{i=1}^{n} b_i x^{c_i}\right| - \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j x^{c_i + c_j} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i x^{c_i} \sum_{i=1}^{n} b_i x^{c_i} - \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j x^{c_i + c_j} = 0$$

и значи $s(x) > s(0)$ при $x \neq 0$.

Второ решение. Нека $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{c_i - 1/2}$ и $g(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{c_i - 1/2}$. Даденото неравенство следва директно от интегралното неравенство на Коши-Буняковски-Шварц:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 g^2(x)dx \geq \left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2.$$