МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. “П. Яворов” № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

VIII клас

Зад.1 Пресметнете стойността на израза $P(x)=x^3+2x^2-5x-a$ при $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $a=(2-\sqrt{6})^2$. Намерете за кои стойности на параметъра a числото $2\sqrt{5}$ е решение на уравнението $P(x)=0$.

(7 точки)

Зад.2 Дадено е уравнението $x^2-9x+q=0$, където q е реален параметър.

а) Решете уравнението при $q=7$ и ако корените на уравнението x_1 и x_2 са реални, различни и $x_1< x_2$, то намерете целите числа n, за които е в сила неравенството $x_1<n<x_2$.

б) Намерете целите положителни стойности на параметъра q, за които корените на даденото уравнение са цели числа.

(7 точки)

Зад.3 Даден е ΔABC. Върху страните му AC и BC са избрани съответно точки M и N, такива, че $AM=BN$. Точките P и Q са среди съответно на AN и BM. Да се докаже, че ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ е перпендикулярна на правата PQ.

(7 точки)

Време за работа - 4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

Указание за проверка

VIII клас

Зад.1 Пресмятане на $a=(2-\sqrt{6})^2$ **(1точка)**.

Прилагане на формулите $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$ **(1точка)** и $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ **(1точка).**

Намиране на стойността на израза $P(x)=x^3+2x^2-5x-a=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ (при $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $a=(2-\sqrt{6})^2$) **(1точка)**.

Пресмятане на $(2\sqrt{5})^3$ **(1точка)** и $(2\sqrt{5})^2$ **(1точка)**.

Извършване на тъждествени преобразувания и намиране на параметъра $a=30\sqrt{5}+40$ **(1точка)**.

Зад.2 а) При $q=7$ получаваме квадратното уравнение $x^2-9x+7=0$**.**

Дискриминантата $D=(-9)^2-4.1.7=53$, $D\geq 0$ **(0,5 точки)** $\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{53}}{2}$ **(1 точка).**

Тъй като $7<\sqrt{53}<8$, то $\dfrac{9-8}{2}<\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}<\dfrac{9-7}{2}<\dfrac{9+7}{2}<\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}<\dfrac{9+8}{2}$, то

$0<x_1=\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}<1<8<x_2=\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}<9$ **(1 точка)**

Следователно търсените цели числа са: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 **(1 точка)**.

б) Определяне $D=(-9)^2-4.1.q=81-4q$ на $x^2-9x+q=0$ **(0,5 точки)**.

$D\geq 0$ и q е цяло положително число $\Leftrightarrow q\in\{1, 2, 3, ... ,19, 20\}$ **(1 точка)**.

Цели положителни стойности на q, за които корените на даденото уравнение са цели числа:

Цяла положителна стойност на q	*Уравнение* $x^2-9x+q=0$	*Дискриминанта* D	*Цели корени* x_1 *и* x_2	*Точки*
$q=8$	$x^2-9x+8=0$	$D=81-4q=49$	$x_1=1$ и $x_2=8$	**(0,5 точки)**
$q=14$	$x^2-9x+14=0$	$D=81-4q=25$	$x_1=2$ и $x_2=7$	**(0,5 точки)**
$q=18$	$x^2-9x+18=0$	$D=81-4q=9$	$x_1=3$ и $x_2=6$	**(0,5 точка)**
$q=20$	$x^2-9x+20=0$	$D=81-4q=1$	$x_1=4$ и $x_2=5$	**(0,5 точка)**

Зад.3 За да докажем, че $l_{\angle ACB}\perp PQ$ е достатъчно да докажем, че ΔHTC е равнобедрен, където H и T са пресечните точки на PQ с AC и BC **(2 точки)**.

Нека K и S са средите съответно на AB и MN **(1точка)**. Четириъгълникът $KQSP$ е ромб (PS, KQ, QS и KP-средни отсечки съответно в ΔANM, ΔABM, ΔBNM и ΔABN) **(1точка)**.

$\Rightarrow \Delta PQS$ е равнобедрен $\Rightarrow \measuredangle SPQ = \measuredangle SQP$ **(1 точка)**, но $SP // HC$ и $SQ // TC$ **(1точка)** $\Rightarrow \Delta HTC$ е равнобедрен $\Rightarrow l_{\measuredangle ACB} \perp PQ$ **(1 точка)**.