



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

LVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ
29 май 2009 г.

Тема за 8 клас

Задача 1. Диагоналите AC и BD на вписания четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точката P , а точката M е средата на страната AB . Известно е, че правите PM и CD са перпендикулярни и че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, не лежи върху правата PM . Да се докаже, че диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни.

Задача 2. Да се докаже, че за всеки три положителни числа a, b, c е вярно неравенството

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9} + \frac{b}{(3b+c+a)^2+9} + \frac{c}{(3c+a+b)^2+9} \leq \frac{1}{10}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. Едно естествено число ще наричаме „11-устойчиво”, ако не е кратно на 11 и ако след смяната на коя да е една негова цифра с която и да е от цифрите от 0 до 9 се получава число, което също не е кратно на 11. Началната цифра не може да се заменя с 0. Да се намерят всички естествени числа с 2009 цифри, които са „11-устойчиви”.