Национална олимпиада по математика, национален кръг, 29 май 2009 г.

Тема за 8 клас

Задача 1. Диагоналите AC и BD на вписания четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точката P, а точката M е средата на страната AB. Известно е, че правите PM и CD са перпендикулярни и че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, не лежи върху правата PM. Да се докаже, че диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни.

Задача 2. Да се докаже, че за всеки три положителни числа a, b, c е вярно неравенството

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9}+\frac{b}{(3b+c+a)^2+9}+\frac{c}{(3c+a+b)^2+9}\le\frac{1}{10}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. Едно естествено число ще наричаме „11-устойчиво”, ако не е кратно на 11 и ако след смяната на коя да е една негова цифра с която и да е от цифрите от 0 до 9 се получава число, което също не е кратно на 11. Началната цифра не може да се заменя с 0. Да се намерят всички естествени числа с 2009 цифри, които са „11-устойчиви”.

Решения

Задача 1. Нека $\angle BAC=\alpha$ и правите PM и CD се пресичат в точката N. Очевидно $\angle BDC=\alpha, \angle DPN=\angle MPB=90^\circ-\alpha$ (1т). Нека симетралата на отсечката AB пресича правата AP в точката E. Ако допуснем, че точките P и E съвпадат, ще получим, че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, лежи върху правата PM - противоречие. Знаем, че $\angle PAB=\alpha$, а $\angle MPB=90^\circ-\alpha$. Триъгълникът ABE е равнобедрен, откъдето $\angle MEB=90^\circ-\alpha=\angle MPB$ (3т). Следователно около четириъгълника $PMBE$ може да се опише окръжност с диаметър BE (2т), защото $\angle EMB$ е прав, а оттам и $\angle PBE$ е прав, тоест диагоналите на $ABCD$ са перпендикулярни (1т).

Задача 2. Ще използваме, че за всяко положително число x е вярно неравенството $\frac{1}{x^2+9}\le\frac{1}{6x}$ (1т), като равенство се достига при $x=3$, както и $x+\frac{1}{x}\ge 2$ (1т), като равенство се достига при $x=1$. Оттук получаваме

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9}\le\frac{a}{6(3a+b+c)},\ \frac{b}{(3b+a+c)^2+9}\le\frac{b}{6(3b+a+c)}$$ и

$$\frac{c}{(3c+b+a)^2+9}\le\frac{c}{6(3c+b+a)}$$ (1т). Нека положим

$3a+b+c=x, 3b+c+a=y, 3c+b+a=z$, тогава

$10a=4x-y-z, 10b=4y-x-z, 10c=4z-x-y$ (1т). Така получаваме:

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9}+\frac{b}{(3b+c+a)^2+9}+\frac{c}{(3c+a+b)^2+9}\le$$
$$\le\frac{a}{6(3a+b+c)}+\frac{b}{6(3b+a+c)}+\frac{c}{6(3c+b+a)}\le$$
$$\le\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\left(\frac{4x-y-z}{x}+\frac{4y-x-z}{y}+\frac{4z-x-y}{z}\right)\le \qquad (2т)$$
$$\le\frac{1}{60}\left(12-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)-\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right)\le$$
$$\le\frac{1}{60}(12-2-2-2)\le\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$$

Равенство се достига когато има равенство навсякъде или при $a=b=c=\frac{3}{5}$ (1т).

Задача 3. Нека числото $P=\overline{a_1a_2\dots a_{2009}}$ е „11-устойчиво" и нека $S=S_1-S_2$, където $S_1=a_1+a_3+\dots+a_{2009}$ е сумата от цифрите на нечетни позиции в P, а $S_2=a_2+a_4+\dots+a_{2008}$ е сумата от цифрите на четни позиции в P. Да разгледаме произволна цифра a_{2i}, стояща на четно място в P. Тогава никое от числата $S+a_{2i};S+a_{2i}-1;S+a_{2i}-2;\dots;S+a_{2i}-9$ няма да се дели на 11, защото ако $S+a_{2i}-j$ се дели на 11, то замяната на цифрата a_{2i} с цифрата j в числото P ще ни доведе до число, което се дели на 11, тоест P няма да е „11-устойчиво". Но числата $S+a_{2i};S+a_{2i}-1;S+a_{2i}-2;\dots;S+a_{2i}-9$ са десет поредни цели числа и щом никое от тях не се дели на 11, то на 11 се дели числото $S+a_{2i}+1$ (1т). Оттук следва, че всички цифри, стоящи на четни позиции в P дават един и същ остатък при деление на 11, а това означава, че те са равни (1т). Същото разсъждение можем да приложим и за цифрите на P, стоящи на нечетни позиции, освен първата (защото при първата цифра има замяна с нула, която е забранена). Следователно, ако съществуват „11-устойчиви" числа с 2009 цифри, то те трябва да имат вида $\overline{a_1a_2a_3a_2a_3\dots a_2a_3}$ (1т). Разбира се, в този запис цифрите a_1,a_2,a_3 не са обезателно различни. Нека сега P_1 е „11-устойчиво" число с повече от 22 цифри. Тогава числото P_1^*, получено от P_1 след премахването на последните 22 цифри, също е „11-устойчиво". Това е така, защото ако замяната на някоя цифра в P_1^* го прави кратно на 11, същата замяна ще направи кратно на 11 и P_1, а това е невъзможно - P_1 е „11-устойчиво". Обяснението на този факт се крие в обстоятелството, че сумите, които проверяваме за кратност на 11 при числата P_1 и P_1^*, се различават точно с $11(a_2-a_3)$, а това е число, кратно на 11 (1т). И понеже 2009 дава остатък 7 при деление на 22, за да решим докрай задачата, е достатъчно да намерим седемцифрените „11-устойчиви" числа. Всяко такова число трябва да има вида $\overline{a_1a_2a_3a_2a_3a_2a_3}$, където a_1,a_2 и a_3 са произволни цифри и $a_1\ne 0$. Нека $S=a_1+a_3+a_3+a_3-a_2-a_2-a_2=a_1+3a_3-3a_2$. Съгласно доказаното по-горе, за да не може замяната на някоя от цифрите a_2 с произволна цифра да доведе до получаването на кратно на 11 число, е необходимо и достатъчно числото $S+a_2+1=a_1-2a_2+3a_3+1$ да се дели на 11. За да не може замяната на някоя от цифрите a_3 да доведе до получаването на кратно на 11 число, е необходимо и достатъчно никое от числата $S-a_3, S-a_3+1, \ldots, S-a_3+9$ да не се дели на 11, а това означава, че числото $S-a_3-1=a_1+2a_3-3a_2-1$ да се дели на 11. За да не може замяната на цифрата a_1 с някоя от цифрите $1;2;\ldots,9$ да доведе до число, кратно на 11, е необходимо и достатъчно никое от числата $1+3a_3-3a_2; 2+3a_3-3a_2; \ldots; 9+3a_3-3a_2$ да не се дели на 11, а това ще е изпълнено точно тогава, когато едно от числата $3a_3-3a_2$ или $3a_3-3a_2-1$ се дели на 3. И така, цифрите a_1, a_2, a_3 трябва да са такива, че числата $a_1-2a_2+3a_3+1$; $a_1+2a_3-3a_2-1$; $3a_3-3a_2$ са едновременно кратни на 11 или числата $a_1-2a_2+3a_3+1$; $a_1+2a_3-3a_2-1$; $3a_3-3a_2-1$ са кратни на 11(1т). И в двата случая обаче, щом първите две числа са кратни на 11, то и тяхната разлика a_2+a_3+2 трябва да е кратна на 11, а това е възможно само когато $a_2+a_3=9$. Като разгледаме възможностите за a_2 и a_3, виждаме, че тогава $3a_3-3a_2$ никога няма да се дели на 11, а $3a_3-3a_2-1$ ще се дели на 11 само при $a_3=1$ и $a_2=8$ (1т). Тогава за a_1 остава единствената възможност $a_1=1$. Оттук получаваме, че единственото „11-устойчиво" седемцифрено число е 1818181. Следователно отговорът на задачата е, че единственото „11-устойчиво" число с 2009 цифри е числото $\underbrace{181818\ldots181}_{2009}$ (1т).