МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

XII клас

Зад.1 Околният ръб на наклонена триъгълна призма е 4 см. Страните на перпендикулярното на този ръб сечение се отнасят така, както 9:10:17, а лицето му е 144 см^2. Намерете лицето на околната повърхнина на призмата.

(7 точки)

Зад.2 В правоъгълния ΔABC точката M е средата на медианата към хипотенузата AB. От M са спуснати перпендикулярите MX, MY и MZ към BC, AC и AB ($X \in BC, Y \in AC, Z \in AB$). Ако лицето на ΔABC е S, то да се изрази лицето на ΔXYZ чрез S.

(7 точки)

Зад.3 Даден е изразът $M = \dfrac{\dfrac{\sqrt{4a^2-4a+1}}{a} + a\sqrt{4a^2-4a+1} + 4 - \dfrac{2}{a}}{\sqrt{4a - 4 + \dfrac{1}{a}}}$.

а) Да се опрости M;
б) Да се пресметне числената стойност на M, ако a е най-големият от корените на уравнението $\left(2x^2 - x - 6\right)^2 + \left(2x^2 + x - 6\right)^2 = 4x^2$.

(7 точки)

Време за работа - 4 часа.

Желаем Ви успех!

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

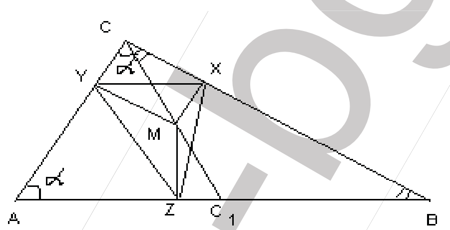
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

Указание за проверка

XII клас

Зад.1 Нека страните на перпендикулярното сечение са *a=9x, в=10x и c=17x, x>0* **(0,5точки)**, откъдето полупериметъра $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{9x+10x+17x}{2}=18x$ **(1точка)**. Лицето на сечението е $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18x.9x.8x.x}=144\Rightarrow x=2$ **(1 точка)**.
Намиране страните *a, в* и *c* на перпендикулярното на наклонения ръб *l* сечение-18 см, 20 см и 34см **(1,5 точки)**. От $l\perp(ABC)\Rightarrow l\perp AB, l\perp AC\, u\, l\perp BC$ **(1,5 точки)**.
Лицето на околната повърхнина на призмата е сбор от лицата на три успоредника: $S=l.AB+l.AC+l.BC=l.(a+b+c)=4.72=288$ см^2 **(1,5 точки)**.

Зад.2



Нека CC$_1$ - медиана към хипотенузата AB, M- среда на CC$_1$ и CM = MC$_1$ = m.
Знаем, че AC$_1$ = BC$_1$ = CC$_1$ $\Rightarrow$ AB = 4m и ако $\measuredangle$CAB = $\measuredangle$ACC$_1$ = α,
то $\measuredangle$ABC = $\measuredangle$BCC$_1$ = $90^0-\alpha$ **(0,5точки)**.

От правоъгълните триъгълници MXC, MYC и MZC$_1$, следва че MX=m.sin($90^0-\alpha$)=m.cosα, MY=m.sinα и MZ=m.sin($180^0-2\alpha$)=m.sin2α **(1,5 точки)**.

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=S_{\Delta MXY}+S_{\Delta MYZ}+S_{\Delta MXZ}=\frac{1}{2}MX.MY\sin 90^0+\frac{1}{2}MY.MZ\sin(180^0-\alpha)+\frac{1}{2}MX.MZ\sin(90^0+\alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=\frac{1}{2}(MX.MY+MY.MZ\sin\alpha+MX.MZ\cos\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(m^2\sin\alpha\cos\alpha+m^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha+m^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha)=\frac{1}{2}m^2(\sin\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}m^2(\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha)=\frac{3}{4}m^2\sin 2\alpha$$ **(2,5точки)**.

$$S=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.4m\sin\alpha.4m\cos\alpha=8m^2\sin\alpha\cos\alpha=4m^2\sin 2\alpha$$ **(2точки)**

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=\frac{3}{16}S$$ **(0,5 точки)**.

<u>Зад.3</u> а) Допустимите стойности на променливата са $a>0$, $a\neq\frac{1}{2}$ **(0,5 точки)**.

$$M=\frac{\frac{\sqrt{(2a-1)^2}}{a}+a\sqrt{(2a-1)^2}+\frac{2(2a-1)}{a}}{\sqrt{\frac{(2a-1)^2}{a}}}\Leftrightarrow M=\frac{\frac{|2a-1|}{a}+a|2a-1|+\frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}}\Leftrightarrow$$

$$M=\frac{\frac{1+a^2}{a}|2a-1|+\frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}}\Leftrightarrow M=\frac{\frac{(1+a^2)|2a-1|+2(2a-1)}{\sqrt{a}}}{|2a-1|}\Leftrightarrow M=\frac{1+a^2}{\sqrt{a}}+\frac{2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|}$$

(2,5 точки)

$\Rightarrow M=\frac{a^2-1}{\sqrt{a}}$ за $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ и $M=\frac{a^2+3}{\sqrt{a}}$ за $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ **(1 точка)**.

б) $(2x^2-x-6)^2+(2x^2+x-6)^2=4x^2\Leftrightarrow((2x^2-6)-x)^2+((2x^2-6)+x)^2=4x^2$

$\Leftrightarrow 2(2x^2-6)^2+2x^2=4x^2\Leftrightarrow(2x^2-6)^2+x^2=2x^2\Leftrightarrow 4x^4-25x^2+36=0\Rightarrow$

$x_{1,2}=\pm2$; $x_{3,4}=\pm\frac{3}{2}$ **(2 точки)**

$\Rightarrow a=2$ и от $2\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow M=\frac{a^2+3}{\sqrt{a}}=\frac{4+3}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **(1 точка)**.