МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Ловеч
ул. "Търговска" 43, ет.10, ☎ (068) 603806, факс (068) 603807
http://rio-lovech.hit.bg e-mail: rio_lovech@yahoo.com

58-ма НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

XII клас

Зад.1 Околният ръб на наклонена триъгълна призма е 4 см. Страните на перпендикулярното на този ръб сечение се отнасят така, както 9:10:17, а лицето му е 144 см^2. Намерете лицето на околната повърхнина на призмата, ако върховете A, B и C на перпендикулярното сечение са вътрешни точки за съответните околни ръбове на призмата.

(7 точки)

Зад.2 В правоъгълния ΔABC точката M е средата на медианата към хипотенузата AB. От M са спуснати перпендикулярите MX, MY и MZ към BC, AC и AB $(X \in BC, Y \in AC, Z \in AB)$. Ако лицето на ΔABC е S, то да се изрази лицето на ΔXYZ чрез S.

(7 точки)

Зад.3 Даден е изразът $M = \dfrac{\dfrac{\sqrt{4a^2-4a+1}}{a} + a\sqrt{4a^2-4a+1} + 4 - \dfrac{2}{a}}{\sqrt{4a-4+\dfrac{1}{a}}}$.

а) Да се опрости M

б) Да се пресметне числената стойност на M, ако a е най-големият от корените на уравнението $(2x^2-x-6)^2 + (2x^2+x-6)^2 = 4x^2$.

(7 точки)

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.
Време за работа – 4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Ловеч
ул. "Търговска" 43, ет.10, ☎ (068) 603806, факс (068) 603807
http://rio-lovech.hit.bg e-mail: rio_lovech@yahoo.com

58-ма НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

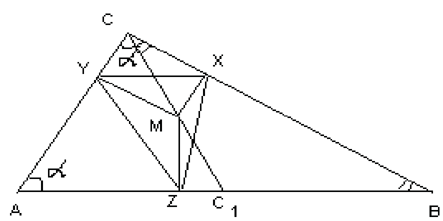
КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНИЯ
XII клас

Зад.1 Нека страните на перпендикулярното сечение са *a=9x, в=10x и c=17x* **(0,5точки)**, откъдето полупериметъра $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9x+10x+17x}{2}=18x$ **(1точка)**.
Лицето на сечението е $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18x.9x.8x.x}=144 \Rightarrow x=2$ **(1 точка)**.

Намиране страните *a, в* и *c* на перпендикулярното на наклонения ръб l сечение-18 см, 20 см и 34см **(1,5 точки)**. От $l \perp (ABC) \Rightarrow l \perp AB, l \perp AC \, и \, l \perp BC$ **(1,5 точки)**.

Лицето на околната повърхнина на призмата е сбор от лицата на три успоредника: $S=l.AB+l.AC+l.BC=l.(a+b+c)=4.72=288$ см^2**(1,5 точки)**.

Зад.2 Нека CC_1-медиана към хипотенузата AB, M-среда на CC_1 и $CM = MC_1 = m$. Знаем, че $AC_1 = BC_1 = CC_1 \Rightarrow AB = 4m$ и ако $\angle CAB = \angle ACC_1 = \alpha$, то $\angle ABC = \angle BCC_1 = 90^0-\alpha$ **(0,5точка)**.



От правоъгълните триъгълници MXC, MYC и MZC_1, следва че $MX=m.\sin(90^0-\alpha)=m.\cos\alpha$, $MY=m.\sin\alpha$ и $MZ=m.\sin(180^0-2\alpha)=m.\sin2\alpha$ **(1,5 точки)**.

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=S_{\Delta MXY}+S_{\Delta MYZ}+S_{\Delta MXZ}=\frac{1}{2}MX.MY\sin90^0+\frac{1}{2}MY.MZ\sin(180^0-\alpha)+\frac{1}{2}MX.MZ\sin(90^0+\alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=\frac{1}{2}(MX.MY+MY.MZ\sin\alpha+MX.MZ\cos\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(m^2\sin\alpha\cos\alpha+m^2\sin^2\alpha\sin2\alpha+m^2\cos^2\alpha\sin2\alpha)=\frac{1}{2}m^2(\sin\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}m^2(\frac{1}{2}\sin2\alpha+\sin2\alpha)=\frac{3}{4}m^2\sin2\alpha$$ **(2,5точки)**.

$$S=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.4m\sin\alpha.4m\cos\alpha=8m^2\sin\alpha\cos\alpha=4m^2\sin2\alpha$$ **(2точки)** $\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=\frac{3}{16}S$ **(0,5 точки)**.

Зад.3 **а)** Допустимите стойности на променливата са $a>0$, $a\neq\frac{1}{2}$ **(0,5 точки)** .

$$M=\frac{\frac{\sqrt{(2a-1)^2}}{a}+a\sqrt{(2a-1)^2}+\frac{2(2a-1)}{a}}{\sqrt{\frac{(2a-1)^2}{a}}} \Leftrightarrow M=\frac{\frac{|2a-1|}{a}+a|2a-1|+\frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}} \Leftrightarrow$$

$$M=\frac{\frac{1+a^2}{a}|2a-1|+\frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}} \Leftrightarrow M=\frac{\frac{(1+a^2)|2a-1|+2(2a-1)}{\sqrt{a}}}{|2a-1|} \Leftrightarrow M=\frac{1+a^2}{\sqrt{a}}+\frac{2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|}$$

(2,5точки)

$\Rightarrow M=\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a}}$ за $a\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ и $M=\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a}}$ за $a\in\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$ **(1 точка)**.

б) $(2x^2-x-6)^2+\left(2x^2+x-6\right)^2=4x^2 \Leftrightarrow ((2x^2-6)-x)^2+\left((2x^2-6)+x\right)^2=4x^2$

$\Leftrightarrow 2(2x^2-6)^2+2x^2=4x^2 \Leftrightarrow (2x^2-6)^2+x^2=2x^2 \Leftrightarrow 4x^4-25x^2+36=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$;

$x_{3,4}=\pm\dfrac{3}{2}$ **(2 точки)** $\Rightarrow a=2$ и от $2\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Rightarrow M=\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a}}=\dfrac{4+3}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ **(1 точка)**.