

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**  
**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК**

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: [riopz@pasat.bg](mailto:riopz@pasat.bg)

**ОБЩНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИДАТА ПО МАТЕМАТИКА**  
**15. 03.2009г.**

**XI клас**

**Зад.1** Сумата от първите десет члена на аритметична прогресия е 140, а произведението на втория и деветия член е 147. Намерете прогресията. (7 точки)

**Зад.2** Трапецът ABCD ( $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$ ) е вписан в окръжност с радиус  $R$ .

а) Докажете, че ако в трапеца може да се впише окръжност, то малката основа, височината и голямата основа са последователни членове на геометрична прогресия.

б) Намерете малката основа, бедрото и лицето на трапеца, ако голямата основа AB служи за диаметър на описаната окръжност и  $\angle ACD = \alpha$ . (7 точки)

**Зад.3** Геометричната прогресия  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  е с положителни членове и частно  $q$ , а аритметичната прогресия  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  е растяща с разлика  $d$ . При какво условие уравненията  $b_1 + \log_{\sqrt[q]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[q]{y}} a_1$  и  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2}$  ще бъдат еквивалентни? (7 точки)

*Време за работа - 4 часа.*

*Желаем Ви успех!*

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**  
**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК**

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: [riopz@pasat.bg](mailto:riopz@pasat.bg)

**ОБЩНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**  
**15. 03.2009г.**

**Указание за проверка**

**XI клас**

**Зад.1** Съгласно условието на задачата 
$$\begin{cases} 2a_1 + 9d = 28 \\ (a_1 + d)(a_1 + 8d) = 147 \end{cases} \quad \text{(2 точки),}$$

откъдето 
$$\left(\frac{28-7d}{2}\right)\left(\frac{28+7d}{2}\right) = 147 \quad \text{(1 точка)} \Rightarrow d = \pm 2 \quad \text{(2 точки)}$$

$\Rightarrow a_1 = 5$  или  $a_1 = 23$  **(2 точки)**. Прогресията е 5,7,9,... или 23,21,19,.....

**Зад.2**

**а)** Щом трапецът е вписан в окръжността, то той е равнобедрен, т.е.  $BC=AD$  **(1 точка)**. Ако трапецът е описан около окръжност, то  $AB+CD=BC+AD=2AD$  **(1 точка)**. Ако  $DH$  е

височината на трапеца, то  $DH^2 = AD^2 - AH^2 = \left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = AB \cdot CD$ , с

което твърдението е доказано **(1 точка)**.

**б)** Тъй като  $\angle ACD = \alpha$ , то

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow \angle DAC = 90^\circ - 2\alpha \quad \text{(1 точка).}$$

От синусова теорема намираме

$$CD = 2R \sin(90^\circ - 2\alpha) = 2R \cos 2\alpha \quad \text{и} \quad AD = 2R \sin \alpha \quad \text{(1 точка).}$$

$$\Rightarrow DH^2 = AD^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha - R^2(1 - \cos 2\alpha)^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha - 4R^2 \sin^4 \alpha = R^2 \sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow DH = R \sin 2\alpha \quad \text{(1 точка)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(AB+CD) \cdot DH}{2} = 2R^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha \quad \text{(1 точка).}$$

**Зад.3**

Уравнението (1)  $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$

има смисъл при  $y > 0$ ,  $y \neq 1$ ,  $d \geq 2$ ,  $d$  – естествено число **(1 точка)**.  
Извършваме преобразувания и получаваме

$$b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt[d]{y}} \frac{a_n}{a_1} = b_n - b_1 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt[d]{y})^{b_n - b_1} = \frac{a_n}{a_1} \Leftrightarrow y = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_n - b_1}} = \left(\frac{a_1 q^{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_1 + (n-1)d - b_1}} = q^{\frac{(n-1)d}{(n-1)d}} = q \quad \text{(1 точка).}$$

Тъй като  $q > 0$  и  $q \neq 1$ , то  $y = q$  е единственото решение на уравнението **(1 точка)**.

Лявата страна на уравнението (2)  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2}$  е  
сума на безкрайната геометрична прогресия  $x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{4}, -\frac{x^4}{8}, \dots, (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}}, \dots$  с първи

член  $x$  и частно  $\frac{-x^2}{x} = -\frac{x}{2}$  **(1 точка)**.

Ако  $\left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$ , то сумата  $S = \frac{x}{1 - (-\frac{x}{2})}$  **(1 точка)**.

Уравнението  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (-2; 2)$  **(1 точка)**.

Следователно уравненията (1) и (2) ще бъдат еквивалентни, ако  $q = \frac{2}{3}$  **(1 точка)**.