МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Ловеч
ул. “Търговска” 43, ет.10, ☎ (068) 603806, факс (068) 603807
http://rio-lovech.hit.bg e-mail: rio_lovech@yahoo.com

58$^{-ма}$ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

XI клас

Зад.1 Сумата от първите десет члена на аритметична прогресия е 140, а произведението на втория и деветия член е 147. Намерете прогресията.

(7 точки)

Зад.2 Трапецът ABCD(AB||CD, AB>CD) е вписан в окръжност с радиус R .

а) Докажете, че ако в трапеца може да се впише окръжност, то малката основа, височината и голямата основа са последователни членове на геометрична прогресия.

б) Намерете малката основа, бедрото и лицето на трапеца, ако голямата основа AB служи за диаметър на описаната окръжност и $\measuredangle ACD=\alpha$.

(7 точки)

Зад.3 Геометричната прогресия $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ е с положителни членове и частно $q \neq 1$, а аритметичната прогресия $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ е растяща с разлика d. При какво условие уравненията $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$ и $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{2^{n-1}} + ... = \frac{1}{2}$ ще бъдат еквивалентни?

(7 точки)

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.
Време за работа – 4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Ловеч
ул. “Търговска” 43, ет.10, ☎ (068) 603806, факс (068) 603807
http://rio-lovech.hit.bg e-mail: rio_lovech@yahoo.com

58-ма НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНИЯ

XI клас

Зад.1 Съгласно условието на задачата $\begin{vmatrix} 2a_1+9d=28 \\ (a_1+d)(a_1+8d)=147 \end{vmatrix}$ **(2точки),** откъдето

$\left(\dfrac{28-7d}{2}\right)\left(\dfrac{28+7d}{2}\right)=147$ **(1точка)** $\Rightarrow d=\pm 2$ **(2точки)** $\Rightarrow a_1=5$ или $a_1=23$ **(2точки)**.

Прогресията е 5,7,9,… или 23,21,19,…. .

Зад.2 **а)** Щом трапецът е вписан в окръжността, то той е равнобедрен, т.е. BC=AD**(1точка)**. Ако трапецът е описан около окръжност, то AB+CD=BC+AD=2AD**(1точка)**. Ако DH е височината на трапеца, то $DH^2 = AD^2 - AH^2 = \left(\dfrac{AB+CD}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{AB-CD}{2}\right)^2 = AB.CD$, с което твърдението е доказано**(1точка)**.

б) Тъй като $\measuredangle ACD=\alpha$, то [redacted] $=2\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=180^0-4\alpha \Rightarrow \measuredangle DAC=90^0-2\alpha$ **(1точка)**.

От синусова теорема намираме $CD=2R\sin(90^0-2\alpha)=2R\cos 2\alpha$ и $AD=2R\sin\alpha$ **(1точка)**.

$$\Rightarrow DH^2 = AD^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = 4R^2\sin^2\alpha - R^2(1-\cos 2\alpha)^2 = 4R^2\sin^2\alpha - 4R^2\sin^4\alpha = R^2\sin^2 2\alpha$$

$\Rightarrow DH = R\sin 2\alpha$ **(1точка)**

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD).DH}{2} = 2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha$ **(1точка)**.

Зад.3 Уравнението (1) $b_1+\log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$ има смисъл при y>0, y≠1**(1точка)**.

Извършваме преобразувания и получаваме

$$b_1+\log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt[d]{y}}\frac{a_n}{a_1} = b_n - b_1 \Leftrightarrow$$

$(\sqrt[d]{y})^{b_n-b_1} = \dfrac{a_n}{a_1} \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_n-b_1}} = \left(\dfrac{a_1q^{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_1+(n-1)d-b_1}} = q^{\frac{(n-1)d}{(n-1)d}} = q$ **(1точка)**. Тъй като $q>0$ и $q\neq 1$, то $y=q$ е единственото решение на уравнението **(1точка)**.

Лявата страна на уравнението (2) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{x^4}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{2^{n-1}}+\ldots=\dfrac{1}{2}$ е сума на безкрайната геометрична прогресия $x,-\dfrac{x^2}{2},\dfrac{x^3}{4},-\dfrac{x^4}{8},\ldots,(-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{2^{n-1}},\ldots$ с първи член x и частно

$\frac{-\frac{x^2}{2}}{x} = -\frac{x}{2}$ **(1точка)**. Ако $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2;2)$, то сумата $S = \frac{x}{1-(-\frac{x}{2})}$ **(1точка)**.

Уравнението $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \ldots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{2^{n-1}} + \ldots = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (-2;2)$ **(1точка)**.

Ако $\left|-\frac{x}{2}\right| > 1$, то $y = q$ и x принадлежи на празното множество. **(0,5 точки)**

Следователно уравненията (1) и (2) ще бъдат еквивалентни, ако $q = \frac{2}{3}$ **(0,5точки)**.