МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

X клас

Зад.1 Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Решете неравенството $x+b+28a\leq\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}$, където a и b са съответно най-голямата и най-малката стойност на функцията $y=-2x^2+4x+1$ в интервала [-3;0].

(7 точки)

Зад.3 Права, минаваща през точката A, пресича окръжност в точките B и C точката (B лежи между точките A и C). Друга права, минаваща през точката A, пресича окръжността в точките D и E (точката D лежи между точките A и E). Известно е, че правите BD и CE се пресичат в точката F, освен това FE=1 и AC=2AE.

а) Да се докаже, че $\measuredangle$EDF=$\measuredangle$BCF.

б) Да се намери дължината на отсечката FD.

(7 точки)

Време за работа - 4 часа.

Желаем Ви успех!

math-bg.com

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
15. 03.2009г.

Указание за проверка

X клас

Зад.1 Допустимите стойности на променливите са x>0, y≥0, x≠y **(1,5 точки)**.

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-xy-(x^2+y^2)\ \textbf{(2точки)=}$$

$$=\frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-y^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{x-y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-xy-x^2-y^2\ \textbf{(1,5точки)=}$$

$$=\frac{x^3-y^3}{x^{\frac{2}{3}}\left(x-y\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(x-y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}-xy-x^2-y^2=\frac{x^3-y^3}{(x-y)}-xy-x^2-y^2$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)}-xy-x^2-y^2=x^2+xy+y^2-xy-x^2-y^2=0\ \textbf{(2точки)}.$$

Зад.2 Върхът (x_0,y_0) на параболата $y=-2x^2+4x+1$ е с координати $x_0=-\frac{b}{2a}=1$ и $y_0=y(1)=3$. Определяме $y(0)=1$-пресечна точка с ординатната ос, а от $-2x^2+4x+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$-пресечни точки с абсцисната ос.

От $a=-2<0\Rightarrow$ най-малката стойност b на функцията y в интервала [-3;0] е $b=y(-3)=-29$ **(1 точка)** и най-голямата стойност a на функцията y в интервала [-3;0] е $a=y(0)=1$ **(1 точка)**.

$$x+b+28a\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\Leftrightarrow x-1\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\ \textbf{(0,5 точки)}.$$

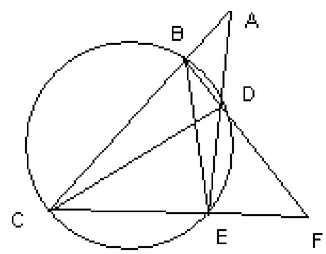
Дефиниционната област на неравенството е $x\neq-1, x\neq 2$ **(1 точка)**.

math-bg.com

Преобразуваме неравенството и получаваме

$$x-1 \le \frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2} \Leftrightarrow x-1 \le \frac{2x+7}{x+1}-\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)} \le 0$$ (**2 точки**).

Следователно $x \in (-\infty,-2] \cup (-1,2) \cup (2,3]$ (**1,5 точки**).



<u>Зад.3</u> а) $\measuredangle$EDF + $\measuredangle$EDB=180^0 (съседни ъгли) **(0,5 точки)** и
$\measuredangle$BCE+$\measuredangle$EDB=180^0 (CEDB-вписан четириъгълник) **(1 точка)**,
откъдето $\measuredangle$EDF=$\measuredangle$BCF (**0,5 точки**).

б) Триъгълниците ADC и ABE са подобни, защото имат общ ъгъл, а ъглите ACD и AEB се опират на хордата BD, т.е. $\measuredangle$ACD=$\measuredangle$AEB **(1,5 точки)**.

Тогава $\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{AE}=2$ **(0,5 точки)**.

Аналогично ΔBEF~ΔCDF **(1,5 точки)**,

следователно $\frac{DF}{EF}=\frac{CD}{BE}=\frac{CF}{BF}=2$ **(0,5 точки)**,

откъдето $DF=2EF=2$ (**1точка**).

math-bg.com