

58^{-ма} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

X клас

Зад.1 Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза

$$C = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\frac{(x^{-1} - yx^{-2})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} - xy - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{-1}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Решете неравенството $x + b + 28a \leq \frac{2x+7}{x+1} + \frac{x^2-4}{2+x-x^2}$, където a и b са съответно най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = -2x^2 + 4x + 1$ в интервала $[-3;0]$.

(7 точки)

Зад.3 Права, минаваща през точката А, пресича окръжност в точките В и С (точката В лежи между точките А и С). Друга права, минаваща през точката А, пресича окръжността в точките D и E (точката D лежи между точките А и E). Известно е, че правите BD и CE се пресичат в точката F, освен това FE=1 и AC=2AE.

- Да се докаже, че $\angle EDF = \angle BCF$.
- Да се намери дължината на отсечката FD.

(7 точки)

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4 часа.

Желаем Ви успех!

58^{-ма} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩНСКИ КРЪГ
15.03.2009г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНИЯ

X клас

Зад.1 Допустимите стойности на променливите са $x > 0, y \geq 0, x \neq y$ (**1,5 точки**).

$$C = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\frac{(x^{-1} - yx^{-2})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} - xy - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{-1}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - xy - (x^2 + y^2) \quad (\mathbf{2 \text{ точки}}) = \frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - y^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x - y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - xy - x^2 - y^2 \quad (\mathbf{1,5 \text{ точки}})$$

$$= \frac{x^3 - y^3}{x^{\frac{2}{3}}(x - y)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x - y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} - xy - x^2 - y^2 = \frac{x^3 - y^3}{(x - y)} - xy - x^2 - y^2 = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)} - xy - x^2 - y^2$$

$$= x^2 + xy + y^2 - xy - x^2 - y^2 = 0 \quad (\mathbf{2 \text{ точки}}).$$

Зад.2 Върхът (x_0, y_0) на параболата $y = -2x^2 + 4x + 1$ е с координати $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$ и $y_0 = y(1) = 3$. Определяме $y(0) = 1$ -пресечна точка с ординатната ос, а от $-2x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$ -пресечни точки с абсцисната ос. От $a = -2 < 0 \Rightarrow$ най-малката стойност b на функцията y в интервала $[-3; 0]$ е $b = y(-3) = -29$ (**1 точка**) и най-голямата стойност a на функцията y в интервала $[-3; 0]$ е $a = y(0) = 1$ (**1 точка**).

$$x + b + 28a \leq \frac{2x + 7}{x + 1} + \frac{x^2 - 4}{2 + x - x^2} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{2x + 7}{x + 1} + \frac{x^2 - 4}{2 + x - x^2} \quad (\mathbf{0,5 \text{ точки}}).$$

Дефиниционната област на неравенството е $x \neq -1, x \neq 2$ (**1 точка**).

Преобразуваме неравенството и получаваме

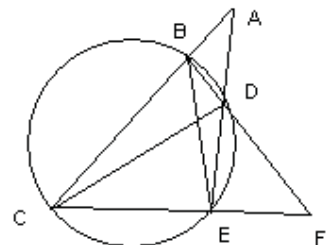
$$x - 1 \leq \frac{2x + 7}{x + 1} + \frac{x^2 - 4}{2 + x - x^2} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{2x + 7}{x + 1} - \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)} \Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 1)} \leq 0 \quad (\mathbf{2 \text{ точки}}).$$

Следователно $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 2) \cup (2, 3]$ (**1,5 точки**).

Зад.3 а) $\angle EDF + \angle EDB = 180^\circ$ /съседни ъгли/ (**0,5 точки**) и $\angle BCE + \angle EDB = 180^\circ$ /CEDB-вписан/ (**1 точка**),
откъдето $\angle EDF = \angle BCF$ (**0,5 точки**).

б) Триъгълниците ADC и ABE са подобни, защото имат общ ъгъл, а ъглите ACD и AEB се опират на хордата BD, т.е. $\angle ACD = \angle AEB$

(**1,5 точки**). Тогава $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AE} = 2$ (**0,5 точки**).



Аналогично $\triangle BEF \sim \triangle CDF$ (1,5 точки), следователно $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BE} = \frac{CF}{BF} = 2$ (0,5 точки), откъдето $DF = 2EF = 2$ (1 точка).

math-bg.com