Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x^3 + xy^2 + 16 = 0 \\ 3y^3 - xy^2 + 16 = 0 \end{array} \right.$.

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AC и BC съответно в точките P и Q, а правата PQ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките K и L ($K \in \overset{\frown}{AC}$, $L \in \overset{\frown}{BC}$). Ако K е среда на $\overset{\frown}{AC}$, да се намери отношението $KL : AB$.

Задача 3. Множеството от върховете на правилен 30-ъгълник е разбито на 15 непресичащи се двойки, които определят 15 отсечки. Да се докаже, че поне две от 15-те отсечки са равни.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

Тема за 9. клас

Задача 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt{x^2+a} = x - a$$

има поне едно цяло решение.

Задача 5. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O и описан около окръжност с център I, като $I \not\equiv O$. Правата OI пресича две от страните на $ABCD$ във вътрешни точки. Да се докаже, че произведението на тези две страни не надминава произведението на другите му две страни.

Задача 6. Да се докаже, че системата $\left| \begin{array}{l} x^3 + 2x^2y + xy^2 + 7z^4 = 8 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 + 9z^4 = 8 \end{array} \right.$ няма решение в цели числа.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 0899 804 465 (Стоян Боев).

58. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 25-26.04.2009 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

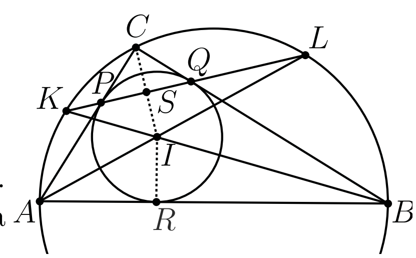
Задача 9.1. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} x^3 + xy^2 + 16 = 0 \\ 3y^3 - xy^2 + 16 = 0 \end{array}\right.$.

Решение. Изваждаме почленно второто уравнение от първото и получаваме $x^3 + 2xy^2 - 3y^3 = 0$. Лесно се вижда, че $y = 0$ не дава решение на системата. При $y \neq 0$ разделяме полученото уравнение на y^3 и полагаме $\frac{x}{y} = t$. Получаваме $t^3 + 2t - 3 = 0 \iff (t-1)(t^2 + t + 3) = 0$ с единствено реално решение $t = 1$. Тогава $x = y$ и от системата получаваме $x = y = -2$.

Оценяване. 1 т. за елиминиране на свободния член, 1 т. за случая $y = 0$, 1 т. за полагането (разглеждането на уравнението като хомогенно), 3 т. за решаване на уравнението от трета степен за t и 1 т. за довършване.

Задача 9.2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AC и BC съответно в точките P и Q, а правата PQ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките K и L ($K \in \overset{\frown}{AC}$, $L \in \overset{\frown}{BC}$). Ако K е среда на $\overset{\frown}{AC}$, да се намери отношението $KL : AB$.

Решение. Имаме



$$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{CL}) = \sphericalangle QPC = \sphericalangle PQC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CK} + \overset{\frown}{BL}).$$

Но $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{CK}$ и следователно L е среда на $\overset{\frown}{BC}$. Тогава AL пресича BK в центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и KL е симетрала на CI.

Така получаваме, че $PIQC$ е квадрат, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и освен това $\triangle KLC \sim \triangle ABI$, т.е. $KL : AB = CS : IR = CS : CP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, където R е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с AB.

Оценяване. 3 т. за доказване, че L е среда на $\overset{\frown}{BC}$, 2 т. за $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, 1 т. за $\triangle KLC \sim \triangle ABI$ и 1 т. за достигане до отговора.

Задача 9.3. Множеството от върховете на правилен 30-ъгълник е разбито на 15 непресичащи се двойки, които определят 15 отсечки. Да се докаже, че поне две от 15-те отсечки са равни.

Решение. Нека $A_1A_2\dots A_{30}$ е даденият правилен 30-ъгълник. Да отъждествим дължината на отсечката A_iA_j с числото $|i-j|$, ако $|i-j| \leq 15$ и с $30-|i-j|$, ако $|i-j| \geq 16$. Тогава е достатъчно да докажем, че поне две от числата, съпоставени на 15-те отсечки, са равни.

Да допуснем противното, т.е. числата са $1, 2, \dots, 15$. Да означим съответно с $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{15}}$ краищата с по-малък индекс на отсечките с дължини $1, 2, \dots$, 15. Тогава вторите им краища са съответно A_{i_1+1} или A_{i_1+30-1}, A_{i_2+2} или A_{i_2+30-2} и т.н. Оттук следва, че сумата от всички индекси е равна на $M = 2(i_1+i_2+\cdots+i_{15})+30m+a_1+a_2+\cdots+a_{15}$, където m е цяло число, а $|a_i| = i$ за $i = 1, 2, \dots, 15$. Тогава M има същата четност, както числото $a_1+a_2+\cdots+a_{15}$, а то е с четността на $1+2+\cdots+15 = 120$. Следователно M е четно число. От друга страна, имаме $M = 1+2+\cdots+30 = 15.31 = 465$, противоречие.

Оценяване. 1 т. за заместване на дължините с цели числа, 2 т. за дефиниране на инвариант, които води до противоречие и 4 т. за реализация на противоречие.

Задача 9.4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt{x^2+a} = x-a$$

има поне едно цяло решение.

Решение. След повдигане на квадрат достигаме до уравнението $2ax = a(a-1)$.

Случай 1. Ако $a = 0$, то уравнението добива вида $|x| = x$ и всяко $x \geqq 0$ е решение.

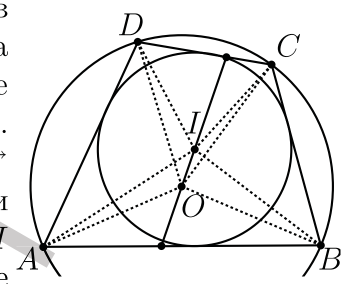
Случай 2. Ако $a \neq 0$, то $x = \dfrac{a-1}{2}$. Тогава $x^2+a = \frac{(a-1)^2}{4}+a = \frac{(a+1)^2}{4} \geqq 0$ и за да имаме решение е достатъчно $x-a = \dfrac{a-1}{2}-a \geqq 0$, т.е. $a \leqq -1$.

Следователно уравнението има поне едно цяло решение точно когато a е нечетно отрицателно число или 0.

Оценяване. 1 т. за свеждане на уравнението до линейно, 1 т. за *случай 1*, 3 т. за *случай 2* и 2 т. за достигане до отговора.

Задача 9.5. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O и описан около окръжност с център I, като $I \not\equiv O$. Правата OI пресича две от страните на $ABCD$ във вътрешни точки. Да се докаже, че произведението на тези две страни не надминава произведението на другите му две страни.

Решение. Понеже $ABCD$ е описан, то $AB + CD = AD + BC$. Ще докажем, че OI пресича във вътрешни точки най-дългата и най-късата страна на $ABCD$. От горното равенство лесно се съобразява, че те са срещулежащи и нека са съответно AB и CD. От $AB > BC$ следва, че $\sphericalangle OBA < \sphericalangle OBC$, т.е. $BO^{\rightarrow}$ лежи между $BI^{\rightarrow}$ и $BA^{\rightarrow}$. Аналогично, $AO^{\rightarrow}$ лежи между $AI^{\rightarrow}$ и $AB^{\rightarrow}$, т.е. O лежи вътре в $\triangle ABI$ и OI пресича страната AB. По същия начин получаваме, че OI пресича страната CD.



От друга страна, имаме равенствата $4AB.CD = (AB+CD)^2 - (AB-CD)^2$и $4AD.BC = (AD + BC)^2 - (AD - BC)^2$. Оттук и от факта, че AB и CD са най-дългата и най-късата страни, получаваме $(AB - CD)^2 > (AD - BC)^2$ и следователно $AB.CD < AD.BC$.

Оценяване. 1 т. за предположението че OI пресича най-дългата и най-късата страна, 3 т. за доказателството му и 3 т. за доказване на неравенството (което може да се направи и чисто геометрично).

Задача 9.6. Да се докаже, че системата $\left| \begin{array}{l} x^3 + 2x^2y + xy^2 + 7z^4 = 8 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 + 9z^4 = 8 \end{array} \right.$ няма решение в цели числа.

Решение. Да допуснем, че системата има решение. Събираме двете уравнения и получаваме $(x + y)^3 + (2z)^4 = 16$.

Да разгледаме остатъците на двете страни по модул 13. Възможните остатъци на третите степени са 0, 1, 5, 8 и 12, а остатъците на четвъртите степени са 0, 1, 3 и 9. Тогава лесно се вижда, че единствената възможност е да имаме $(x + y)^3 \equiv 0 \pmod{13}$ и $(2z)^4 \equiv 3 \pmod{13}$. Оттук $y \equiv -x \pmod{13}$ и $z^4 \equiv 1 \pmod{13}$.

Заместваме y и z^4 (по модул 13) в първото уравнение на системата и получаваме $7 \equiv 8 \pmod{13}$, противоречие.

Оценяване. 1 т. за представянето $(x+y)^3+(2z)^4 = 16$, 1 т. за разглеждане на остатъците по модул 13, 3 т. за намиране на единствената възможност (остатъци 0 и 3), 1 т. за заместване в системата по модул 13 и 1 т. за получаване на противоречие.

Задача 10.1. Да се реши неравенството

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}},$$

където a и b са реални параметри и $a > b > 0$.

Решение. Ще разгледаме поотделно три възможности за знаците на числителите.