Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   8   К Л А С

Задача 1. Графиките на функциите $f(x)=|x-2|+a$ и $g(x)=2x+b$ се пресичат в точката A, чиято абсциса е 1. Графиките на $f(x)$ и $g(x)$ пресичат ординатната ос съответно в точките B и C. Намерете лицето на триъгълника ABC.

Задача 2. Върху окръжност са взети точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n>6)$ в посочения ред така, че $\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\ldots=\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}=\overset{\frown}{A_nA_1}$.

а) Намерете n, ако е известно, че правите A_1A_4 и A_2A_{n-2} са перпендикулярни.

б) Върху правата A_1A_n е взета точката M така, че A_1 е между A_n и M и $A_1M=A_1A_4$. Докажете, че точките M, A_2 и A_{n-2} лежат на една права.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото $4^{n+1}+3\cdot 11^n$ е степен на просто число.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Понеже точката A лежи върху всяка от двете графики, то координатите й ще имат вида $A\left(1; f\left(1\right)\right)$ и $A\left(1; g\left(1\right)\right)$. От $f\left(1\right)=1+a$ **(1 т.)** и $g\left(1\right)=2+b$ **(1 т.)** следва, че $a+1=b+2$ или $a-b=1$ **(1 т.)**. От друга страна, координатите на точките B и C ще имат вида $B\left(0; f\left(0\right)\right)$ и $C\left(0; g\left(0\right)\right)$. Лесно се пресмята, че $B\left(0;2+a\right)$ **(1 т.)** и $C\left(0;b\right)$ **(1 т.)**. Тогава за лицето на триъгълника ABC получаваме, че е равно на $\frac{1}{2}BC\cdot h_A=\frac{1}{2}\left|2+a-b\right|\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$ квадратни мерни единици **(2 т.)**.

Задача 2. а) Да отбележим, че точките A_2 и A_{n-2} са в различни полуравнини относно правата A_1A_4 и ако хордите A_1A_4 и A_2A_{n-2} се пресичат в точката L, то $\angle A_1LA_2=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_1A_2}+\overset{\frown}{A_4A_{n-2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{(n-6)360^\circ}{n}\right)=\frac{(n-5)180^\circ}{n}$ **(2 т.)**. Оттук

$$\frac{(n-5)180^\circ}{n}=90^\circ \Rightarrow \frac{n-5}{n}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow n=10 \ \textbf{(1 т.)}.$$

б) Тъй като $\overset{\frown}{A_1A_4}=\overset{\frown}{A_{n-2}A_1}=\frac{3\cdot 360^\circ}{n}$, то хордите A_1A_4 и A_1A_{n-2} са равни, а това дава, че $A_1M=A_1A_{n-2}$ **(1 т.)**. Следователно ΔA_1MA_{n-2} е равнобедрен и $\angle MA_{n-2}A_1=\angle A_1MA_{n-2}=\frac{1}{2}\angle A_nA_1A_{n-2}$. Но $\sphericalangle A_nA_1A_{n-2}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_{n-2}A_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 360^\circ}{n}=\frac{360^\circ}{n}$, откъдето $\angle MA_{n-2}A_1=\angle A_1MA_{n-2}=\frac{180^\circ}{n}$ **(1 т.)**. Освен това $\angle A_2A_{n-2}A_1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1A_2}=\frac{180^\circ}{n}$ **(1 т.)**. Получените равенства означават, че правите MA_{n-2} и A_2A_{n-2} сключват един и същ ъгъл с правата A_1A_{n-2}, като при това точките M и A_2 лежат в една и съща полуравнина относно правата A_1A_{n-2}. Оттук следва, че точките M, A_2 и A_{n-2} лежат на една права **(1 т.)**.

Задача 3. Ще покажем най-напред, че числото $4^{n+1}+3\cdot 11^n$ се дели на 7 за всяко естествено число n. Понеже $11\equiv 4\pmod 7$, то $3\cdot 11^n\equiv 3\cdot 4^n\pmod 7$ и следователно $4^{n+1}+3\cdot 11^n\equiv 4\cdot 4^n+3\cdot 4^n\equiv 0\pmod 7$. Ето защо даденото число може да бъде степен само на числото 7 **(1 т.)**. Това означава, че търсим всички двойки цели положителни числа (n,m), за които е вярно равенството $4^{n+1}+3\cdot 11^n=7^m$. При $n=1$ имаме $4^{n+1}+3\cdot 11^n=16+33=49=7^2$, тоест $n=1$ е решение на задачата **(1 т.)**. Нека n е четно. Тогава $11^n\equiv 1\pmod 8$, откъдето $4^{n+1}+3\cdot 11^n\equiv 3\pmod 8$. Но сравнението $7^m\equiv 3\pmod 8$ е невъзможно. Следователно n е нечетно **(1 т.)**. Но при нечетно n имаме $4^{n+1}+3\cdot 11^n\equiv 3\cdot 11^n\equiv 1\pmod 8$ и следователно трябва $7^m\equiv 1\pmod 8$. Последното е възможно точно когато m е четно **(1 т.)**. И така, можем да запишем $n=2k+1, k\geq 1$ (случаят $n=1$ вече разгледахме) и $m=2t,\ t\geq 1$. Тогава равенството $4^{n+1}+3\cdot 11^n=7^m$ приема вида $4^{2k+2}+3\cdot 11^{2k+1}=7^{2t}$, откъдето получаваме, че $3\cdot 11^{2k+1}=7^{2t}-4^{2k+2}$ или

$3\cdot 11^{2k+1}=\left(7^t-4^{k+1}\right)\left(7^t+4^{k+1}\right)$ **(1 т.)**. Числата 7^t+4^{k+1} и 7^t-4^{k+1} са нечетни и разликата им е степен на двойката. Следователно те са взаимно прости. При това числото 7^t-4^{k+1} се дели на 3. Това означава, че равенството $3\cdot 11^{2k+1}=\left(7^t-4^{k+1}\right)\left(7^t+4^{k+1}\right)$ е изпълнено точно тогава, когато $7^t-4^{k+1}=3$ и $7^t+4^{k+1}=11^{2k+1}$ **(1 т.)** (тук използваме, че не е възможно $7^t+4^{k+1}=1$). Но от равенството $7^t-4^{k+1}=3$ следва, че $7^t\equiv 3\pmod{8}$, което вече отбелязахме, че е невъзможно **(1 т.)**. Следователно само $n=1$ е решение на задачата.