



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

Задача 1. В 8:00 часа сутринта от град A за град B тръгнала кола със скорост 60 км/ч , а 40 минути по-късно след нея тръгнал автобус със скорост 90 км/ч . След като била изпреварена от автобуса, колата увеличила скоростта си с 25% . Когато автобусът пристигнал в B колата била на 25 км от B . Да се намери:

- разстоянието от A до B ;
- в колко часа колата е била на 5 км от автобуса.

Задача 2. На диагонала AC и на страните BC и CD на квадрата $ABCD$ са избрани съответно точки O , M и N така, че $AO = OM = ON$ и $CM > CN$. Намерете мярката на $\angle MAN$.

Задача 3. Съществува ли естествено число n , за което числото $4^n + 2^n + 5$ е точен куб на естествено число?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

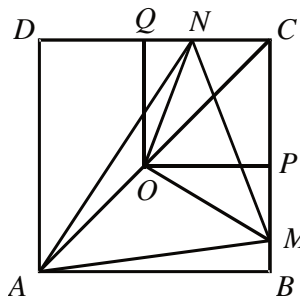
Задача 1. а) Ако t е времето (в часове) от тръгването на колата до изпреварването ѝ от автобуса, то $60t = 90\left(t - \frac{2}{3}\right)$, откъдето $2t = 3t - 2$ и $t = 2$. Така изпреварването е станало в 10:00 часа на $2 \cdot 60 = 120$ км от A **(1 т.)**. Оттук нататък скоростта на колата се увеличава с 15 км/ч и достига 75 км/ч **(1 т.)**. Нека x е времето (в часове) от изпреварването до пристигането на автобуса в B . Тогава $90x = 75x + 25$ и $x = \frac{5}{3}$, а изминатият от автобуса път след изпреварването е $90 \cdot \frac{5}{3} = 150$ км. Така разстоянието от A до B е $120 + 150 = 270$ км **(1 т.)**.

б) Има два случая:

Ако y е времето (в часове) преди изпреварването, когато колата е била на 5 км пред автобуса, то $90y - 60y = 5$, така че $y = \frac{1}{6}$ **(1 т.)**. Това е станало 10 минути преди изпреварването, т.е. в 9:50 часа **(1 т.)**.

Ако z е времето (в часове) след изпреварването, когато колата е била на 5 км зад автобуса, то $90z - 75z = 5$, така че $z = \frac{1}{3}$ **(1 т.)**. Това е станало 20 минути след изпреварването, т.е. в 10:20 часа **(1 т.)**.

Задача 2. Означаваме $\angle MAN = x$, $\angle CAN = \alpha$ и $\angle CAM = \beta$. От точката O спускаме перпендикуляри OP ($P \in BC$) и OQ ($Q \in CD$) съответно към страните BC и CD на квадрата **(1 т.)**. Триъгълниците POC и QOC са еднакви и следователно $CP = CQ$ **(1 т.)**. По условие $AO = ON$ и затова $\angle NOC = 2\alpha$ като външен ъгъл за равнобедрения $\triangle AON$ **(1 т.)**. Аналогично $\angle MOC = 2\beta$, откъдето $\angle MON = 2(\alpha + \beta) = 2x$ **(1 т.)**. От друга страна триъгълниците POM и QON са еднакви **(1 т.)**. Така $PM = QN$. Тъй като $CM > CN$ и $CP = CQ$, точката P е между C и M , а точката N е между C и Q **(1 т.)**, както е показано на чертежа. От еднаквостта на триъгълниците POM и QON следва още $\angle QON = \angle POM$. Имаме $90^\circ = \angle QOP = \angle QON + \angle NOP = \angle POM + \angle NOP = \angle NOM = 2x$. Следователно $x = 45^\circ$ **(1 т.)**.



Задача 3. Да предположим, че за някои естествени числа n и m е вярно равенството $4^n + 2^n + 5 = m^3$. Остатъците, които лявата страна на равенството дава по модул 7, са 0 и 4 **(1 т.)**, а остатъците, които дясната страна дава при деление на 7, са 0, 1 и 6 **(1 т.)**. Ето защо равенството $4^n + 2^n + 5 = m^3$ е възможно само когато и двете му страни се делят на 7 **(1 т.)**. Но числото $4^n + 2^n + 5$ се дели на 7 точно тогава, когато n се дели на 3 **(1 т.)**. Нека $n = 3k$, k – естествено число. Тогава числото $4^n + 2^n + 5$ може да се запише във

вида $4^n + 2^n + 5 = (2^k)^6 + (2^k)^3 + 5$. Ако означим $2^k = a$, то получаваме равенството $a^6 + a^3 + 5 = m^3$ **(1 т.)**. Но $a^6 + a^3 + 1 > (a^2)^3$ и

$$(a^2 + 1)^3 - (a^6 + a^3 + 5) = 3a^4 - a^3 + 3a^2 - 4 = a^3(3a - 1) + 2a^2 + (a - 2)(a + 2) > 0$$

при $a \geq 2$ **(1 т.)**. Това означава, че равенството $a^6 + a^3 + 5 = m^3$ е невъзможно, защото $a^6 + a^3 + 5$ се намира между кубовете на две последователни естествени числа. Следователно не съществува естествено число n , за което числото $4^n + 2^n + 5$ е точен куб на естествено число **(1 т.)**.

math-bg.com