Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се реши уравнението

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 16\frac{4^{x-1}+6}{2^x+1} = 0.$$

Задача 2. В кръг с радиус 1 са разположени четири триъгълника със сума на лицата 3. Да се докаже, че два от тях имат обща вътрешна точка.

Задача 3. Да се намерят всички реални числа a, за които:

а) съществува функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такава, че $f(0) = a$ и $f(f(x)) = x^{2009}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$;

б) съществува непрекъсната функция със свойствата от а).

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 0888 937 087 (Николай Николов).

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. В $\triangle ABC$ ($AC < BC$) с лице $20\sqrt{3}$ точките M и I са съответно медицентър и център на вписаната окръжност. Отсечката IM има дължина 1 и е успоредна на страната AB. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Задача 5. Нека n е естествено число. Да се докаже, че:

а) уравнението $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+x)} = 1$ има единствено неотрицателно решение x_n;

б) редицата с общ член x_n е сходяща и да се намери нейната граница.

Задача 6. Да се намерят всички двойки (a, b) от естествени числа такива, че $n^2 + n + 1$ дели $(an + 1)^{10} + b$ за всяко естествено число n.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 0888 937 087 (Николай Николов).

Задача 12.1. Да се реши уравнението

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 16\frac{4^{x-1}+6}{2^x+1} = 0.$$

Решение. Изследваме функцията $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Имаме $f'(x) = 12(x^3 - x^2 - 2x) = 12x(x+1)(x-2)$. Оттук $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$ и $f'(x) > 0$ при $x(-1, 0) \cup (2, +\infty)$. Тогава f намалява в първите два интервала и расте във вторите два. Следователно най-малката стойност на f се достига при $x = -1$ или $x = 2$. Понеже $f(-1) = -5 > -32 = f(2)$, тя е равна на $f(2) = -32$.

От друга страна,

$$g(x) = \frac{4^{x-1}+6}{2^x+1} \geq 2 \Leftrightarrow 4(2^{x-2}-1)^2 \geq 0.$$

Следователно $f(x) + 16g(x) \geq -32 + 16.2 = 0$, като равенство се достига само при $x = 2$.

Оценяване. 1 т. за намиране на нулите на f', 1 т. за определяне на знаците на f', 1 т. за определяне на интервалите на монотонност на f, 1 т. за намиране на най-малката стойност на f, 2 т. за намиране на най-малката стойност на g и 1 т. за окончателния отговор.

Задача 12.2. В кръг с радиус 1 са разположени четири триъгълника със сума на лицата 3. Да се докаже, че два от тях имат обща вътрешна точка.

Решение. Да допуснем противното. Тогава триъгълниците покриват лице 3. Разглеждаме краищата на радиусите, върху които лежат върховете им (ако някой връх съвпада с центъра, вземаме кой да е радиус). Получаваме вписан 12-ъгълник (възможно изроден) с лице $S > 3$. От друга страна, както е добре известно, S не надминава лицето на съответния правилен 12-ъгълник, а то е равно на 3 и получаваме противоречие.

Оценяване. 3 т. за разглеждане на съответния вписан 12-ъгълник и 4 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Да се намерят всички реални числа a, за които:

а) съществува функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такава, че $f(0) = a$ и $f(f(x)) = x^{2009}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$;

б) съществува непрекъсната функция със свойствата от а).

Решение. а) Понеже $f^{2009}(x) = f(f(f(x))) = f(x^{2009})$, то $a^{2009} = a$, т.е.

$a = 0, \pm 1$. Да отбележим, че ако $\{b, c, d\} = \{-1, 0, 1\}$ и

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & |x| > 1 \\ 1/x^{2009}, & 0 < |x| < 1 \\ b, & x = b \\ c, & x = d \\ d, & x = c \end{cases}$$

то $f(f(x)) = x^{2009}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Значи търсените числа са 0 и ± 1.

б) Да отбележим, че f е инективна функция (ако $f(x) = f(y)$, то $x^{2009} = f(f(x)) = f(f(y)) = y^{2009}$, т.е. $x = y$). Ако допуснем, че $a = f(0) = -1$, то $f(-1) = 0$. За $e = f(1)$ имаме, че $e \neq 0, -1$ и $e^{2009} = e$, т.е. $e = 1$. Тогава $f(0)f(1) < 0$ и понеже f е непрекъсната, то $f(y) = 0$ за някое $y \in (0, 1)$. Това е противоречие с инективността на f и $f(-1) = 0$. Аналогично $a \neq 1$. Остава $a = 0$. Тази стойност може да се реализира както показва следната непрекъсната функция f, за която $f(f(x)) = x^{2009}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{2009}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\sqrt{2009}}, & x < 0. \end{cases}$$

Оценяване. а) 1 т. за $a = 0, \pm 1$ и 2 т. за примери; б) 3 т. за $a = 0$ и 1 т. за пример.

Задача 12.4. В $\triangle ABC$ ($AC < BC$) с лице $20\sqrt{3}$ точките M и I са съответно медицентър и център на вписаната окръжност. Отсечката IM има дължина 1 и е успоредна на страната AB. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Решение. Да означим $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Нека CL ($L \in AB$) и CN ($N \in AB$) са съответно ъглополовяща и медиана (L е между A и N, понеже $AC < BC$). От условието следва, че $\triangle CLN \sim \triangle CIM$. Тогава $\dfrac{LN}{1} = \dfrac{CL}{CI} = \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{3}{2}$ (понеже M е медицентър). От $\dfrac{b}{a} = \dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AL}{c - AL}$ получаваме $AL = \dfrac{bc}{a+b}$. Тъй като AI е ъглополовяща в $\triangle ALC$, то $\dfrac{CI}{IL} = \dfrac{AC}{AL} = \dfrac{a+b}{c}$ и оттук $\dfrac{CL}{CI} = \dfrac{a+b+c}{a+b}$. Но $\dfrac{CL}{CI} = \dfrac{3}{2}$ и получаваме $a + b = 2c$. Тогава

$$\frac{3}{2} = LN = AN - AL = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} = \frac{a-b}{4},$$

откъдето намираме $a - b = 6$. Сега от $a + b = 2c$ и $a - b = 6$ следва, че $a = c + 3$ и $b = c - 3$. Хероновата формула ни дава, че

$$1200 = S_{ABC}^2 = \frac{3c}{2}\left(\frac{c}{2} - 3\right)\left(\frac{c}{2} + 3\right)\frac{c}{2} \Leftrightarrow c^4 - 36c^2 - 6400 = 0,$$

т.е. $(c^2-100)(c^2+64)=0$, откъдето $c=10$ и $a=c+3=13$, $b=c-3=7$.

Оценяване. 2 т. за $a+b=2c$, 2 т. за $\dfrac{c(a-b)}{a+b}=3$ и 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.5. Нека n е естествено число. Да се докаже, че:

а) уравнението $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+x)}=1$ има единствено неотрицателно решение x_n;

б) редицата с общ член x_n е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. а) Функцията $f_n(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+x)}$ е намаляваща при $x\geq 0$. Понеже $f_n(0)\geq 1>1-\dfrac{1}{n+1}=f_n(1)$ следва, че уравнението $f_n(x)=1$ има единствено неотрицателно решение x_n, като $x_n<1$.

б) Ако $y_n=1-\dfrac{4}{n+3}$, то

$$f(y_n)=\frac{1}{1+y_n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+y_n)}\geq$$

$$\frac{1}{1+y_n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n+3}{2(n+1)}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=1,$$

т.е. $f(y_n)\geq f(x_n)$. Тогава $y_n\leq x_n<1$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Оценяване. 2 т. за а) и 5 т. за б), от които 2 т, ако доказана само сходимостта
.

Задача 12.6. Да се намерят всички двойки (a,b) от естествени числа такива, че n^2+n+1 дели $(an+1)^{10}+b$ за всяко естествено число n.

Решение. Понеже $n^3\equiv 1(\text{mod } n^2+n+1)$, то

$$(an+1)^{10}+b=b+\sum_{i=0}^{10}\binom{n}{i}(an)^i\equiv$$

$$An^2+Bn+C\equiv[(B-A)n+C-A](\text{mod } n^2+n+1),$$

където

$$A=\binom{10}{2}a^2+\binom{10}{5}a^5+\binom{10}{8}a^8,$$

$$B=\binom{10}{1}a+\binom{10}{4}a^4+\binom{10}{7}a^7+\binom{10}{10}a^{10},$$

$$C = b + \binom{10}{0} + \binom{10}{3}a^3 + \binom{10}{6}a^6 + \binom{10}{9}a^9.$$

Тогава лесно следва, че n^2+n+1 дели $(an+1)^{10}+b$ за всяко естествено число n точно когато $A = B = C$. Имаме, че $A = B$ тогава и само тогава когато a е нула на полинома $xP(x)$, където

$$P(x) = x^9 - \binom{10}{8}x^7 + \binom{10}{7}x^6 - \binom{10}{5}x^4 + \binom{10}{4}x^3 - \binom{10}{2}x + 10.$$

Оттук следва, че a може да е само 1, 2, 5 или 10. Директна проверка показва, че $P(2) = 0$, докато $P(1) \neq 0$, защото е нечетно число. Освен това, 5 дели $P(5)$ и $P(10)$, а 25 не дели тези две числа и значи те не са 0. И така, $a = 2$ и от $A = C$ следва, че $b = 3^5$.

Оценяване. 3 т. за $P(a) = 0$, 1 т. за $P(2) = 0$ и 3 т. за довършване на решението.