# Министерство на образованието и науката

## 58. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

### Тема за 11. клас

**Задача 1.** Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x+3} = x - a$, където $a$ е реален параметър.

**Задача 2.** а) Да се докаже, че за триъгълник с ъгли $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ е изпълнено равенството

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

където $r$ и $R$ са съответно радиусът на вписаната и на описаната окръжност за този триъгълник.

б) Шестоъгълникът $ABCDEF$ е вписан в окръжност. Да се докаже, че произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ и $\triangle DEF$ е равно на произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ и $\triangle EFA$ тогава и само тогава, когато периметрите на $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ са равни.

**Задача 3.** Група от $n$ човека, където $n$ е четно естествено число, се разполага около маса, местата на която са във върховете на правилен $n$-ъгълник. Винаги ли е възможно да се направят няколко такива разположения така, че всеки двама да са седели в диаметрално противоположни места на масата точно по веднъж?

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

math-bg.com

# Министерство на образованието и науката

## 58. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

### Тема за 11. клас

**Задача 4.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a$, за които уравнението

$$2^{3x} - a2^{2x+1} + (a^2+1)2^x - a = 0$$

има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

**Задача 5.** Дадена е редица от положителни числа $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-2}$$

за $n \geq 3$. Да се намери $a_3$, ако

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}+1} + \frac{1}{a_{2009}} = 1.$$

**Задача 6.** Естествените числа $a$, $b$ и $c$ са такива, че $a^2+ab+b^2=c^2$ и $a$ и $b$ са взаимнопрости. Да се докаже, че числото $|a-b|+2c$ е точен квадрат на естествено число тогава и само тогава, когато то не се дели на 3.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

*За въпроси:* 0888 919 497 (Емил Колев).

math-bg.com

т.е. $-\frac{1}{2} < \cos\gamma < 0$. Имаме последователно

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c} &= \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma} = -\frac{\sin 3\gamma+\sin 2\gamma}{\sin\gamma}\\ &= -(3-4\sin^2\gamma)-2\cos\gamma = -4\cos^2\gamma-2\cos\gamma+1.\end{aligned}$$

Тъй като квадратната функция $y=-4x^2-2x+1$ приема най-голямата си стойност при $x=-\frac{1}{4}\in(-\frac{1}{2},0)$, заключаваме, че $\frac{a+b}{c}\le y(-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$.

**Оценяване.** 2 т. за оценяването на $\gamma$ или други важни оценки за ъглите, 1 т. за прехода чрез синусова теорема, 2 т. за получаване на функция за изследване и 2 т. за получаване на исканата оценка.

**Задача 10.6.** Нека $n$ е естествено число и $N=n(n+1)(n+2)(n+3)$. Да се докаже, че не съществува цяло число $m$, за което $N+m^9=2008$.

**Решение.** Да допуснем противното. Тъй като $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2-1$, разглежданото равенство се записва във вида $k^2+m^9=2009$, където $k=n^2+3n+1$. Да разгледаме последното равенство по модул 19 (тъй като $9=\frac{19-1}{2}$). Тогава от малката теорема на Ферма следва, че $m$ е сравнимо с 0 или $\pm1$ по модул 19, а остатъците на точните квадрати по модул 19 са $0,1,4,5,6,7,9,11,16$ и 17. От друга страна, имаме $2009\equiv 14 \pmod{19}$, откъдето следва, че исканото равенство е невъзможно.

**Оценяване.** 1 т. за съображенето, че $N=k^2-1$, 1 т. за работа с модул, по който се правят важни изводи и 5 т. за достигане на противоречие.

**Задача 11.1.** Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x+3}=x-a$, където $a$ е реален параметър.

**Решение.** Допустимите стойности са $x\in\mathbb{R}$. При $x<a$ уравнението няма решение, а при $x\ge a$ то е еквивалентно на $(1+2a)x=a^2-3$. Тъй като при $a=-\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, то $x=\dfrac{a^2-3}{1+2a}$. От $\dfrac{a^2-3}{1+2a}\ge a$ намираме $\dfrac{a^2+a+3}{1+2a}\le 0$, което е изпълнено само при $a<-\dfrac{1}{2}$. Следователно при $a\ge-\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, а при $a<-\dfrac{1}{2}$ решението е $x=\dfrac{a^2-3}{1+2a}$.

**Оценяване.** 1 т. за допустимите стойности, 1 т. за случая $x>a$, 2 т. за намиране на $x=\dfrac{a^2-3}{1+2a}$ и 3 т. за определяне кога $x>a$.

**Задача 11.2.** а) Да се докаже, че за триъгълник с ъгли $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ е изпълнено равенството

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

където $r$ и $R$ са съответно радиусът на вписаната и на описаната окръжност за този триъгълник.

б) Шестоъгълникът $ABCDEF$ е вписан в окръжност. Да се докаже, че произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ и $\triangle DEF$ е равно на произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ и $\triangle EFA$ тогава и само тогава, когато периметрите на $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ са равни.

**Решение.** а) Равенството следва от тъждеството $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, косинусовата теорема и формулите $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$.

б) Ще използваме, че ако $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ са ъгли в триъгълник, то

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\gamma\cos\gamma = \\ &= 2\sin\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\end{aligned}$$

Като използваме тъждеството от а), получаваме

$$(1)\quad \sin\frac{\sphericalangle ABC}{2}\sin\frac{\sphericalangle CDE}{2}\sin\frac{\sphericalangle EFA}{2} = \sin\frac{\sphericalangle BCD}{2}\sin\frac{\sphericalangle DEF}{2}\sin\frac{\sphericalangle FAB}{2}.$$

Освен това $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF + \sphericalangle FAB = 360^\circ$, откъдето следва, че

$$\sin\sphericalangle ABC + \sin\sphericalangle CDE + \sin\sphericalangle EFA = \sin\sphericalangle BCD + \sin\sphericalangle DEF + \sin\sphericalangle FAB.$$

От синусовата теорема сега следва твърдението на задачата.

**Оценяване.** 2 т. за а) и 5 т. за б), от които 3 т. за равенството (1).

**Задача 11.3.** Група от $n$ човека, където $n$ е четно естествено число, се разполага около маса, местата на която са във върховете на правилен $n$-ъгълник. Винаги ли е възможно да се направят няколко такива разположения така, че всеки двама да са седели в диаметрално противоположни места на масата точно по веднъж?

**Решение.** Ако е възможно да се направят такива разположения, то техният брой трябва да е $n-1$. Задачата е еквивалентна на: да се докаже, че ребрата на пълния граф с $n$ върха могат да се оцветят в $n-1$ цвята така, че да няма две едноцветни ребра с общ връх. Да номерираме върховете с числата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и нека цветовете са $1, 2, \ldots, n-1$. Да оцветим ребрата $A_iA_j$ за $1 \le i, j \le n-1$ в цвят $i + j \pmod{n}$. Ако допуснем, че има различни ребра $A_iA_p$ и $A_iA_q$ с общ връх $A_i$, които са от един и същи цвят, ще получим $i+p \equiv i+q \pmod{n-1}$. Поради $1 \le p, q \le n-1$ това означава, че $p = q$, което е противоречие.

math-bg.com

Следователно от всеки връх от $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ излизат $n-2$ разноцветни ребра към останалите $n-2$ върха. При това от връх $A_i$ не излиза ребро в цвят $2i \pmod{n-1}$. Тъй като $n-1$ е нечетно число, то $2i \not\equiv 2j \pmod{n-1}$, което означава, че свързвайки $A_n$ с всеки от върховете $A_i$, $1 \leq i \leq n-1$ с ребро в цвят $2i \pmod{n-1}$, ще получим търсеното оцветяване.

**Оценяване.** 1 т. за твърдение, че отговорът е да или за определяне, че броят на разположенията е $n-1$, 1 т. за идея за получаване на оцветяване с използване на сбора на индексите на точките и общо най-много 3 т., ако предложеното оцветяване не води до решение.

**Задача 11.4.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a$, за които уравнението

$$2^{3x} - a2^{2x+1} + (a^2+1)2^x - a = 0$$

има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

**Решение.** След полагането $y = 2^x$, уравнението става

$$y^3 - 2ay^2 + (a^2+1)y - a = 0. \tag{1}$$

Ако уравнението от условието има три реални корена, които образуват аритметична прогресия, то уравнението (1) има три реални положителни корена, които образуват геометрична прогресия. Уравнението (1) може да се запише във вида $(y-a)(y^2-ay+1) = 0$. За да има три корена трябва $a > 0$ и $a^2 - 4 > 0$, което означава, че $a > 2$. За тези стойности на $a$ корените $y_1$ и $y_2$ на $y^2 - ay + 1 = 0$ са положителни защото $y_1 y_2 = 1$ и $y_1 + y_2 = a > 0$. Единствената възможност $a$, $y_1$ и $y_2$ да образуват геометрична прогресия е $y_1^2 = ay_2$, което дава $ay_1 - 1 = a(a - y_1)$. Оттук $y_1 = \dfrac{a^2+1}{2a}$ и след заместване в уравнението, получаваме $a^4 - 4a^2 - 1 = 0$. Единственият положителен корен е $a = \sqrt{2+\sqrt{5}}$, като $a > 2$.

**Оценяване.** 1 т. за полагането, 1 т. за извода, че уравнението (1) има три реални положителни корена, които образуват геометрична прогресия, 1 т. за разлагането на (1), 1 т. за определяне на $a > 2$, 2 т. за намиране на $a = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ и 1 т. за проверка, че $a > 2$.

**Задача 11.5.** Дадена е редица от положителни числа $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-2}$$

за $n \geq 3$. Да се намери $a_3$, ако

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}+1} + \frac{1}{a_{2009}} = 1.$$



math-bg.com

**Решение.** Ще докажем, че $a_3 = 6$ е търсената стойност. Нека $a_3 = 6$. Тогава $a_2 = a_1^2 + a_1$, $a_3 = a_2^2 + a_2$ и $a_4 = a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_1 = a_3^2 + a_2^2 + a_2 = a_3^2 + a_3$. Сега по индукция лесно следва, че $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$. Пресмятаме

$$\frac{1}{a_i+1} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i(a_i+1)} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}$$

и след телескопично сумиране получаваме тъждеството от условието. Ясно е, че ако $a_3 > 6$, то сборът от условието е по-малък от 1, а при $a_3 < 6$, той е по-голям от 1. Следователно единствената стойност е $a_3 = 6$.

**Оценяване.** 1 т. за доказване, че има най много една стойност за $a_3$, 2 т. за познаване на отговора и 1 т. за идея за телескопично сумиране.

**Задача 11.6.** Естествените числа $a$, $b$ и $c$ са такива, че $a^2 + ab + b^2 = c^2$ и $a$ и $b$ са взаимнопрости. Да се докаже, че числото $|a-b| + 2c$ е точен квадрат на естествено число тогава и само тогава, когато то не се дели на 3.

**Решение.** Без ограничение можем да считаме, че $a > b$. Записваме равенството $a^2 + ab + b^2 = c^2$ във вида

$$(2c - a + b)(2c + a - b) = 3(a+b)^2.$$

Тъй като $a$ и $b$ са взаимнопрости, то те не са едновременно четни. От $a^2 + ab + b^2 = c^2$ следва, че $c$ е нечетно число. Нека НОД$(2c - a + b, 2c + a - b) = d$. Ако $p$ е нечетен прост делител на $d$, то $p^2$ дели $3(a+b)^2$ и значи $p$ дели $a + b$. Освен това $p$ дели $2c - a + b - (2c + a - b) = 2(b - a)$ и следователно $p$ дели $b - a$. Получаваме, че $p$ дели $a$ и $b$, което е противоречие. Следователно $d$ няма нечетни прости делители и тъй като $d$ дели $4c$, ($c$ е нечетно), то $d = 1, 2$ или 4.

Ако $d = 2$ или 4 (т.е. $a$ и $b$ са нечетни), то числото $c$ е нечетно и тъй като $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 8$, имаме $ab \equiv 7 \pmod 8$. Оттук и от факта, че всяко от числата $a$ и $b$ дава остатък $1, 3, 5$ или 7 при деление на 8, следва, че $a + b$ се дели на 8. Ако $d = 2$, то $2c - a + b = 2p$ и $2c + a - b = 2q$, като $(p, q) = 1$ и $p + q = 2c$ е четно число. Следователно $p$ и $q$ са нечетни и равенството $(2c - a + b)(2c + a - b) = 3(a + b)^2$ е невъзможно по модул 8.

Ако $d = 4$, след съкращаване на 4 получаваме ситуация, аналогична на случая $d = 1$, като при това точният квадрат си остава такъв.

Нека $d = 1$, т.е. $a$ и $b$ са с различна четност. Тогава числата $2c - a + b$ и $2c + a - b$ са нечетни и едното от тях е от вида $3p^2$, а другото е от вида $q^2$, където $q$ не се дели на 3, защото иначе $2c-a+b$ и $2c+a-b$ не са взаимнопрости. Остава да отбележим, че ако $|a - b| + 2c$ е точен квадрат, то е равно на $q^2$ и значи не се дели на 3 и, обратно, ако $|a - b| + 2c$ не се дели на 3, то е равно на $q^2$, т.е. е точен квадрат.

**Оценяване.** 1 т. за разлагането $(2c - a + b)(2c + a - b) = 3(a + b)^2$, 2 т. за доказване, че $d = 1, 2, 4$, 1 т. за случая $a$ и $b$ с различна четност и 3 т. за останалата част.

math-bg.com