Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}},$$

където a и b са реални параметри и $a > b > 0$.

Задача 2. Права през върха C пресича диагонала BD, страната AD и продължението на страната AB на успоредника $ABCD$ съответно в точките M, E и F. Да се докаже, че AM е допирателна към описаната около триъгълника AEF окръжност тогава и само тогава, когато $ABCD$ е ромб.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които равенството

$$(x+y)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} = (2n+1)xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^{n-1}$$

е тъждество.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

Тема за 10. клас

Задача 4. Нека $f(x) = x^2 + (2a-1)x - 3$ и $g(x) = x^2 + (a-2)x - 1$, където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a, за които корените на уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ са разположени така, че между двата корена на едното има точно един корен на другото.

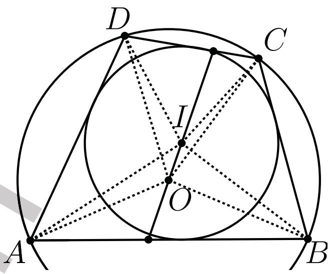
Задача 5. В триъгълник ABC е известно е, че $2 \sphericalangle BAC + 3 \sphericalangle ABC = 180^\circ$. Да се докаже, че $4(BC + CA) \leq 5AB$.

Задача 6. Нека n е произволно естествено число и $N = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Да се докаже, че не съществува цяло число m такова, че $N + m^9 = 2008$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 0888-91-82-81 (Иван Тонов).

Решение. Понеже $ABCD$ е описан, то $AB + CD = AD + BC$. Ще докажем, че OI пресича във вътрешни точки най-дългата и най-късата страна на $ABCD$. От горното равенство лесно се съобразява, че те са срещулежащи и нека са съответно AB и CD. От $AB > BC$ следва, че $\sphericalangle OBA < \sphericalangle OBC$, т.е. $BO^{\rightarrow}$ лежи между $BI^{\rightarrow}$ и $BA^{\rightarrow}$. Аналогично, $AO^{\rightarrow}$ лежи между $AI^{\rightarrow}$ и $AB^{\rightarrow}$, т.е. O лежи вътре в $\triangle ABI$ и OI пресича страната AB. По същия начин получаваме, че OI пресича страната CD.



От друга страна, имаме равенствата $4AB.CD = (AB+CD)^2-(AB-CD)^2$и $4AD.BC = (AD + BC)^2 - (AD - BC)^2$. Оттук и от факта, че AB и CD са най-дългата и най-късата страни, получаваме $(AB - CD)^2 > (AD - BC)^2$ и следователно $AB.CD < AD.BC$.

Оценяване. 1 т. за предположението че OI пресича най-дългата и най-късата страна, 3 т. за доказателството му и 3 т. за доказване на неравенството (което може да се направи и чисто геометрично).

Задача 9.6. Да се докаже, че системата $\left| \begin{array}{l} x^3 + 2x^2y + xy^2 + 7z^4 = 8 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 + 9z^4 = 8 \end{array} \right.$ няма решение в цели числа.

Решение. Да допуснем, че системата има решение. Събираме двете уравнения и получаваме $(x + y)^3 + (2z)^4 = 16$.

Да разгледаме остатъците на двете страни по модул 13. Възможните остатъци на третите степени са 0, 1, 5, 8 и 12, а остатъците на четвъртите степени са 0, 1, 3 и 9. Тогава лесно се вижда, че единствената възможност е да имаме $(x + y)^3 \equiv 0 \pmod{13}$ и $(2z)^4 \equiv 3 \pmod{13}$. Оттук $y \equiv -x \pmod{13}$ и $z^4 \equiv 1 \pmod{13}$.

Заместваме y и z^4 (по модул 13) в първото уравнение на системата и получаваме $7 \equiv 8 \pmod{13}$, противоречие.

Оценяване. 1 т. за представянето $(x+y)^3+(2z)^4 = 16$, 1 т. за разглеждане на остатъците по модул 13, 3 т. за намиране на единствената възможност (остатъци 0 и 3), 1 т. за заместване в системата по модул 13 и 1 т. за получаване на противоречие.

Задача 10.1. Да се реши неравенството

$$\frac{x + a}{\sqrt{x^2 + a^2}} > \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + b^2}},$$

където a и b са реални параметри и $a > b > 0$.

Решение. Ще разгледаме поотделно три възможности за знаците на числителите.

Случай 1. Ако $x > -b$, то двете страни на неравенството са положителни и след повдигане на квадрат, освобождаване от знаменател и опростяване получаваме $(a-b)x(x^2-ab) > 0$. Тъй като $a-b > 0$, остава $x(x^2-ab) > 0$, чиито решения (по метода на интервалите) са $x \in (-\sqrt{ab}, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$. Понеже $-b > -\sqrt{ab}$, решенията в този случай са $x \in (-b, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$.

Случай 2. Ако $-a \leq x \leq -b$, неравенството очевидно е изпълнено.

Случай 3. Ако $x < -a$, то, подобно на случай 1) получаваме неравенството $(a-b)x(x^2-ab) < 0$, чиито решения (отново по метода на интервалите) са $x \in (-\infty, -\sqrt{ab}) \cup (0, \sqrt{ab})$. Понеже $-a < -\sqrt{ab}$, решенията в този случай са $x \in (-\infty, -a)$.

Окончателно, решенията са $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$.

Оценяване. По 2 т. за всеки от трите случая и 1 т. за окончателно описание на решенията.

Задача 10.2. Права през върха C пресича диагонала BD, страната AD и продължението на страната AB на успоредника $ABCD$ съответно в точките M, E и F. Да се докаже, че AM е допирателна към описаната около триъгълника AEF окръжност тогава и само тогава, когато $ABCD$ е ромб.

Решение. Нека $ABCD$ е ромб. Тогава триъгълниците AMD и CMD са еднакви по първи признак, откъдето $\sphericalangle DCM = \sphericalangle DAM$. Но $\sphericalangle DCM = \sphericalangle EFA$. Следователно $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EFA$, т.е. AM е допирателна към описаната около $\triangle AEF$ окръжност.

Нека $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EFA$. Тогава разглежданите по-горе триъгълници са еднакви, защото имат обща страна, един и същ ъгъл срещу нея и равни височини. Това показва, че радиусите на описаните окръжности са равни, а оттам следва и равенство на ъглите.

Оценяване. 3 т. за едната посока: 1 т. за еднаквостта $\triangle AMD \cong \triangle CMD$, 2 т. за $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EFA$ и заключението, че AM е допирателна към описаната около $\triangle AEF$ окръжност; 4 т. за другата посока: 2 т. за еднаквостта $\triangle AMD \cong \triangle CMD$ и 2 т. за довършване.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които равенството

$$(x+y)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} = (2n+1)xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^{n-1}$$

е тъждество.

Решение. Полагаме $x = y = 1$ и получаваме $2^{2n+1} - 2 = 2(2n+1)3^{n-1}$, откъдето $2^{2n} - 1 = (2n+1)3^{n-1}$. Това уравнение се удовлетворява за $n = 1, 2, 3$. Нека $n \geq 4$. Представяме уравнението във вида $\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{3^n}$.

Имаме
$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n > 1 + \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2.3^2} + \frac{1}{3^n},$$
откъдето $\frac{2n+1}{3} > 1 + \frac{n}{3} + \frac{n^2-n}{18}$, което е еквивалентно на $n^2 - 7n + 12 < 0$, а последното не е възможно при $n \geq 4$. Неравенството $\left(\frac{4}{3}\right)^n > \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{3^n}$ при $n \geq 4$ може да се докаже лесно и по индукция.

Следователно търсените стойности на n може да са само $n = 1, 2, 3$. Във всеки от тези три случая непосредствено се проверява, че тъждествата са верни.

Оценяване. 2 т. за полагане, което води до подходящо уравнение за n, 1 т. за решенията $n = 1, 2, 3$, 3 т. за отхвърляне на $n \geq 4$ и 1 т. за проверка на тъждествата при $n = 1, 2, 3$.

Задача 10.4. Нека $f(x) = x^2 + (2a-1)x - 3$ и $g(x) = x^2 + (a-2)x - 1$, където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a, за които корените на уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ са разположени така, че между двата корена на едното има точно един корен на другото.

Решение. *Първи начин.* Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x) = 0$, а x_3 и x_4 са корените на $g(x) = 0$. Тогава не е трудно да се съобрази, че исканото е еквивалентно на $f(x_3)f(x_4) < 0$. Имаме последователно

$$\begin{aligned}
& f(x_3)f(x_4) < 0 \iff [x_3^2 + (2a-1)x_3 - 3][x_4^2 + (2a-1)x_4 - 3] < 0 \\
\iff\ & [1 - (a-2)x_3 + (2a-1)x_3 - 3][1 - (a-2)x_4 + (2a-1)x_4 - 3] < 0 \\
\iff\ & [(a+1)x_3 - 2][(a+1)x_4 - 2] < 0 \\
\iff\ & (a+1)^2 x_3 x_4 - 2(a+1)(x_3 + x_4) + 4 < 0 \\
\iff\ & a^2 - 4a - 1 < 0.
\end{aligned}$$

Следователно търсените стойности на a са $a \in (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$.

Втори начин. Исканото е еквивалентно на изискването пресечната точка на графиките на $f(x)$ и $g(x)$ да лежи под абсцисната ос. Тъй като пресечната точка има абсциса $x_0 = \frac{2}{a+1}$ (единственото решение на уравнението $f(x) = g(x)$), получаваме $g(\frac{2}{a+1}) < 0 \iff a^2 - 4a - 1 < 0$.

Оценяване. 1 т. за съображението, че корените на $f(x)$ и $g(x)$ са реални за всяко a, 2 т. за преминаване към еквивалентно твърдение, което води до неравенство и 4 т. за решаване на неравенството.

Задача 10.5. В триъгълник ABC е известно е, че $2 \sphericalangle BAC + 3 \sphericalangle ABC = 180^\circ$. Да се докаже, че $4(BC + CA) \leq 5AB$.

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Лесно се вижда, че $\beta = 2\gamma - 180^\circ$ и $\alpha = 360^\circ - 3\gamma$, откъдето $90^\circ < \gamma < 120^\circ$, т.е. $-\frac{1}{2} < \cos\gamma < 0$. Имаме последователно

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c} &= \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma} = -\frac{\sin 3\gamma+\sin 2\gamma}{\sin\gamma}\\ &= -(3-4\sin^2\gamma)-2\cos\gamma = -4\cos^2\gamma-2\cos\gamma+1.\end{aligned}$$

Тъй като квадратната функция $y=-4x^2-2x+1$ приема най-голямата си стойност при $x=-\frac{1}{4}\in(-\frac{1}{2},0)$, заключаваме, че $\frac{a+b}{c}\le y(-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$.

Оценяване. 2 т. за оценяването на γ или други важни оценки за ъглите, 1 т. за прехода чрез синусова теорема, 2 т. за получаване на функция за изследване и 2 т. за получаване на исканата оценка.

Задача 10.6. Нека n е естествено число и $N=n(n+1)(n+2)(n+3)$. Да се докаже, че не съществува цяло число m, за което $N+m^9=2008$.

Решение. Да допуснем противното. Тъй като $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2-1$, разглежданото равенство се записва във вида $k^2+m^9=2009$, където $k=n^2+3n+1$. Да разгледаме последното равенство по модул 19 (тъй като $9=\frac{19-1}{2}$). Тогава от малката теорема на Ферма следва, че m е сравнимо с 0 или ±1 по модул 19, а остатъците на точните квадрати по модул 19 са $0,1,4,5,6,7,9,11,16$ и 17. От друга страна, имаме $2009\equiv 14 \pmod{19}$, откъдето следва, че исканото равенство е невъзможно.

Оценяване. 1 т. за съображението, че $N=k^2-1$, 1 т. за работа с модул, по който се правят важни изводи и 5 т. за достигане на противоречие.

Задача 11.1. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x+3}=x-a$, където a е реален параметър.

Решение. Допустимите стойности са $x\in\mathbb{R}$. При $x<a$ уравнението няма решение, а при $x\ge a$ то е еквивалентно на $(1+2a)x=a^2-3$. Тъй като при $a=-\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, то $x=\dfrac{a^2-3}{1+2a}$. От $\dfrac{a^2-3}{1+2a}\ge a$ намираме $\dfrac{a^2+a+3}{1+2a}\le 0$, което е изпълнено само при $a<-\dfrac{1}{2}$. Следователно при $a\ge-\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, а при $a<-\dfrac{1}{2}$ решението е $x=\dfrac{a^2-3}{1+2a}$.

Оценяване. 1 т. за допустимите стойности, 1 т. за случая $x>a$, 2 т. за намиране на $x=\dfrac{a^2-3}{1+2a}$ и 3 т. за определяне кога $x>a$.

Задача 11.2. а) Да се докаже, че за триъгълник с ъгли α, β и γ е изпълнено равенството

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$