МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕ – РУСЕ
57[-ма] НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 15.03.2008 г.

IX клас

1зад. Да се реши уравнението: $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^3}$

7 точки

2зад. Реалните числа x и y са свързани с равенствата:

$$\begin{vmatrix} xy=a^2-7a+14 \\ x^2+y^2=-a^2+12a-27 \end{vmatrix}.$$

а) Да се намерят x и y при a=4.

3 точки

б) Да се намерят стойностите на a, при които системата има точно две решения.

4 точки

3зад. Окръжност минаваща през върховете A и B на равнобедрения ΔABC пресича бедрата AC и BC на триъгълника, съответно в точките P и Q. Отсечките AQ и BP се пресичат в т.D, така че AQ:AD=4:3. Да се намери лицето на ΔDQB, ако лицето на ΔPQC е равно на 3.

7 точки

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4,5 часа.

Желаем Ви успех!

math-bg.com

57-ма НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 15.03.2008 г.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

IX клас

1зад. За определяне на ДС: $x \neq 1, x \geq 0$ **1 точка**

За получаване на еквивалентното уравнение

$2\sqrt{x}\left(1 - x(x-1)\right) = 0$ **2 точки**

За получаване на корена $x = 0$ **1 точка**

За решаване на квадратното уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ и

получаване на корените му $x_{1;2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **2 точки**

За съобразяване на корените с $ДС$: $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **1 точка**

2зад. Ако умножим първото уравнение по 2 и почленно съберем двете уравнения се получава уравнението: $(x+y)^2 = (a-1)^2$

а) при a=4 $\Rightarrow$ системата $\begin{vmatrix} |x+y| = 3 \\ xy = 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow u^2 \pm 3u + 2 \Rightarrow$

решенията: (–1; –2), (–2; –1), (1; 2), (2; 1) **3 точки**

б) За получаване на системата $\begin{vmatrix} |x+y| = a-1 \\ xy = a^2 - 7a + 14 \end{vmatrix}$ при $a \geq 1$ **2 точки**

$\Rightarrow$ уравненията $u^2 \pm (a-1)u + a^2 - 7a + 14$=0. И двете уравнения имат дискриминанта $D = -3a^2 + 26a - 55$. Ако $D > 0$, то и двете уравнения ще имат по две решения, а системата $\rightarrow$ 4.
Ако $D < 0$, то и двете уравнения няма да имат решения $\Rightarrow$ и системата няма да има решение. При D=0 системата ще има точно две решения. D=0 при a=5 и a=$\dfrac{11}{3}$ **2 точки**

3зад. За доказателство, че *ABQP* е равнобедрен трапец **1 точка**

$\dfrac{S_{QDB}}{S_{QBP}} = \dfrac{3}{4}$ (ΔQDB и ΔPDQ са с общ връх) $\Rightarrow S_{QBP} = \dfrac{4}{3} S_{QDB}$ (1) **2 точки**

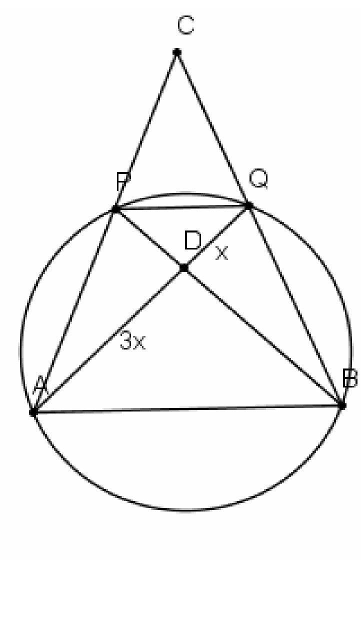
От това, че $\Delta PQD \sim \Delta BAD$ и $\Delta PQC \sim \Delta ABC$ $\Rightarrow$

$\dfrac{CQ}{CB} = \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{DQ}{AD} = \dfrac{1}{3}$ **1 точка**

$\Rightarrow \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{S_{PQC}}{S_{PQB}} = \dfrac{1}{2}$ **1 точка**

$\Rightarrow S_{PQC} = \dfrac{1}{2} S_{PQB}$, и заместваики от (1) получаваме, че

$S_{PQC} = \dfrac{1}{2} S_{PQB} = \dfrac{1}{2} . \dfrac{4}{3} S_{QDB} \Rightarrow S_{QDB} = \dfrac{3}{2} S_{PQC} = \dfrac{9}{2}$ **2 точки**



math-bg.com