МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕ – РУСЕ
57-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 15.03.2008 г.

XII клас

1зад. Да се реши:

а) $\left|\dfrac{x^2-2x}{x+1}\right|<1$ **2 точки**

б) $9^{\sqrt{x-2}}+27\geq 12.3^{\sqrt{x-2}}$ **3 точки**

в) $\cos 2x+3\sin x=2$ **2 точки**

2зад. В тетраедъра *ABCD* стената *BCD* е перпендикулярна на стената *ABC*, а ръбът *AD* сключва с ръбовете *AB* и *AC* ъгли с големина 60°. Ако дължините на ръбовете *AB*, *BC* и *AC* са равни съответно на 2, 4 и 3, да се определи:

а) обемът на тетраедъра *ABCD*; **5 точки**

б) ъгълът между стените *ABC* и *ABD*. **2 точки**

3зад. Даден е израза $f(x)=\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(a.6^x-36^x\right)$, където *a* е параметър.

а) Да се реши неравенството $f(x)\geq -2$ при *a*=6. **2 точки**

б) Да се намери границата $\lim\limits_{a\to\infty}\left[m(a)+4\log_5(a+1)\right]$, където *m*(*a*) е най-малката стойност на $f(x)$. **5 точки**

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4,5 часа.

Желаем Ви успех!

57[-ма] НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 15.03.2008 г.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

XII клас

1зад. а) Неравенството е еквивалентно на системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x}{x+1}<1\\ \dfrac{x^2-2x}{x+1}>-1\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ **2 т.**

б) Полагаме $y=3^{\sqrt{x-2}}$ **1 т.**

За намиране на решението спрямо $y\in(0;3]\cup[9;+\infty)$ **1 т.**

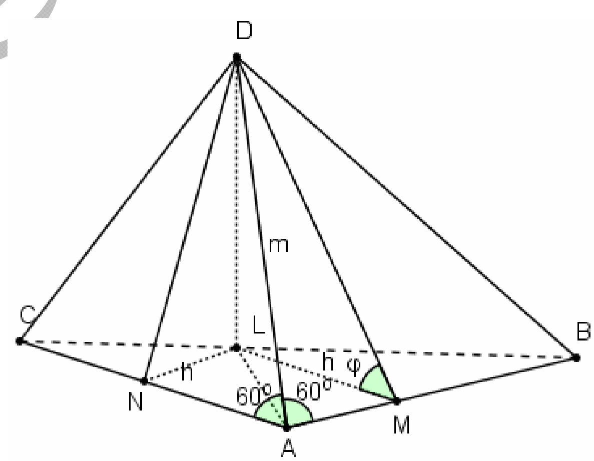
За получаване на крайните решения $x\in[2;3]\cup[6;+\infty)$ **1 т.**

в) Последователно преобразуваме уравнението $\cos 2x+3\sin x=2 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \Leftrightarrow$ $-2\sin^2 x+3\sin x-1=0$, където полагаме $\sin x=y \Rightarrow y_{1;2}=1;\dfrac{1}{2}$ **1 т.**

За решаване на основните тригонометрични уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2}$ и $\sin x=1$ и получаване на корените

$x_k=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $x_k=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ и $x_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ **1 т.**

2зад. а) Нека проекцията на т.*D* в равнината (*ABC*) е т. *L*. От условието, че (*ABC*)$\perp$(*BCD*) $\Rightarrow$ $DL\subset(BCD)$ и *DL* $\perp$ на всяка права от равнината (*ABC*). **1т.**



Нека *DM*$\perp$*AB* (*M*$\in$*AB*) в равнината (*ABD*), а *DN*$\perp$*AC* (*N*$\in$*AC*) в равнината (*ACD*) $\Rightarrow$ $\Delta ADN\cong\Delta ADM$ и нека означим *LN*=*LM*=*h*. За пресмятане лицето на основата *ABC* по Херонова формула $B=\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$

От това, че $S_{ABC}=S_{ACL}+S_{ABL}==$ $\dfrac{1}{2}CA.h+\dfrac{1}{2}BA.h=\dfrac{1}{2}.5.h \Rightarrow h=\dfrac{3\sqrt{15}}{10}$ **1т.**

Да означим околния ръб *AD*=*m*. От правоъгълния триъгълник *ADM* $\Rightarrow$*AM*=$\dfrac{1}{2}m$, а $DM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m$. От правоъгълен ΔDLM по теорема на Питагор $\Rightarrow$ $DL^2=\dfrac{15m^2-27}{20}$ **(1)** .

AL е ъглополовяща в $\Delta ABC \Rightarrow$ $AL^2=AB.AC-CL.BL$, а от основно свойство на ъглополовящата $\Rightarrow$ $CL=\dfrac{12}{5}$ и $BL=\dfrac{8}{5} \Rightarrow$ $AL=\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$ **1 т.** От друга страна от правоъгълен ΔADL по теорема на Питагор $\Rightarrow AL^2=\dfrac{5m^2+27}{20} \Rightarrow \dfrac{9.6}{25}=\dfrac{5m^2+27}{20} \Rightarrow m=\dfrac{9}{5}$ **1т.**

Сега вече можем да намерим височината на пирамидата, замествайки в (1) $\Rightarrow DL = \frac{3}{5}\sqrt{3}$, и за обема получаваме: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}\sqrt{15}.\frac{3}{5}\sqrt{3} = \frac{9}{20}\sqrt{5}$. **1т.**

б) $\measuredangle\left(\left(ABC\right);\left(ABD\right)\right) = \measuredangle LMD$ **1т.**

От правоъгълен $\Delta LMD \Rightarrow tg\varphi = \frac{LD}{ML} \Rightarrow tg\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **1т.**

Зад. 3 а) При a=6 получаваме неравенството: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6.6^x - 36^x\right) \geq -2 \Rightarrow 6.6^x - 6^{2x} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$ **1т.**

полагаме $y = 6^x \Rightarrow y^2 - 6y + 5 \geq 0 \Rightarrow y \in \left(0;1\right] \cup \left[5;6\right)$ (съобразено с ДС за y)

Окончателно $x \in \left(-\infty;0\right] \cup \left[\log_6 5;1\right)$ **1т.**

Б) Нека $m(a) = \min f(x) = \min\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(a.6^x - 36^{2x}\right)\right)$. Тъй като основата на логаритъма е по-малка от 1 то $f(x)$ е намаляваща в множеството от ДС и ще има най-малка стойност когато функцията $g(x) = a.6^x - 36^x$ има максимална стойност. **1т.**

Да разгледаме функцията $g(t) = a.t - t^2$. Тя е растяща за $t < \frac{a}{2}$ и намаляваща при $t > \frac{a}{2} \Rightarrow$ при $t = \frac{a}{2}$, $g(t) = a.t - t^2$ има максимум и $g_{\max}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ **2 т.**

$\Rightarrow m_{\min}\left(\frac{a}{2}\right) = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{a^2}{4}$.

$\lim\limits_{a\to\infty}\left[\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{a^2}{4} + 4\log_5(a+1)\right] = \lim\limits_{a\to\infty}\left[-2\log_5\frac{a^2}{4} + \log_5(a+1)^4\right] = \lim\limits_{a\to\infty}\left[\log_5\left(\frac{4}{a^2}\right)^2.(a+1)^4\right] =$

$\lim\limits_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(\frac{a+1}{a}\right)^4\right] = \lim\limits_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(1+\frac{1}{a}\right)^4\right]$ и тъй като $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{1}{a} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(1+\frac{1}{a}\right)^4\right] = \log_5 16$ **2т.**