МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕ – РУСЕ
57$^{-та}$ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 15.03.2008 г.

XI клас

Зад1. За аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, ...$ са дадени $a_8 = 11{,}2$ и $a_{15} = 19{,}6$. Да се намери прогресията и броят на членовете, които са по-малки от 30.
7 точки

Зад2. Дадена е крайна геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, ...$, за която $\left|\begin{array}{l} a_5 - a_1 = 15 \\ a_4 - a_2 = 6 \\ S_n = 255 \end{array}\right.$. Да се определят първият член a_1, частното *q* и броят на членовете *n*, ако прогресията е растяща. Да се пресметне сумата $U_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, където $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ са членовете на дадената прогресия, а *n* е техният брой.
7 точки

Зад. 3. Дадена е функцията $f(x) = \log_{\sqrt{2-x}} \left|x^2 + 4a\right|$, където *a* е реален параметър.

а) Да се реши уравнението $f(x) = 4$ при $a = -\frac{3}{4}$. **2 точки**

б) да се намерят стойностите на параметъра *a*, при които уравнението $f(x) = 4$ има точно три корена. **3 точки**

в) Да се намери за кои стойности на *x* от неравенствата $0 < a < b$ следва $\log_{\sqrt{2-x}}\left(x^2 + 4a\right) < \log_{\sqrt{2-x}}\left(x^2 + 4b\right)$ **2 точки**

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4,5 часа.

Желаем Ви успех!

57[-ма] **НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА**
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 15.03.2008 г.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

XI клас

Зад. 1 За получаване на системата $\begin{vmatrix} a_1 + 7d = 11.2 \\ a_1 + 14d = 19,6 \end{vmatrix}$ **1 точка**

За намиране на решението (2,8; 1,2) **2 точки**

За съставяне на неравенството $2,8 + (n-1).1,2 < 30$ **2 точки**

За получаване на $n = 23$ **2 точки**

Зад 2. За получаване на системата $\begin{vmatrix} a_1 q^4 - a_1 = 15 \\ a_1 q^3 - a_1 q = 6 \end{vmatrix}$ **1 точка**

За намиране на решенията $q_{1;2} = 2; \frac{1}{2}$ **1 точка**

За уточняване, че $q = 2$ затова, че прогресията е растяща и $a_1 = 1$ **1 точка**

За определяне $S_n = 1.\frac{2^n - 1}{2-1} = 255 \Rightarrow n = 8$ **2 точки**

За пресмятане на сумата $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^7} = 1.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{255}{128}$ **2 точки**

Зад. 3 а) За определяне на ДС: $x < 2; x \neq \pm\sqrt{3}; x \neq 1$ **0,5 точка**

За получаване на еквивалентното уравнение $\left|x^2 - 3\right| = (2-x)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 3 = (2-x)^2$ или $x^2 - 3 = -(2-x)^2$ **1 точка**

За получаване на корените $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x = \frac{7}{4}$ **0,5 точка**

б) За определяне на ДС: $x < 2; x^2 \neq -4a; x \neq 1$ и получаване на уравнението

$\left|x^2 + 4a\right| = (2-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4a = (2-x)^2$ или $x^2 + 4a = -(2-x)^2$ **1 точка**

$\Rightarrow x_1 = 1 - a$ или $x^2 - 2x + 2a + 2 = 0$ и за квадратното уравнение ще искаме да има два различни

корена <2, откъдето следва системата $\begin{vmatrix} D = 1 - 2a - 2 > 0 \\ x_1 = 1 - a < 0 \\ f(2) > 0 \\ x_0 < 2 \end{vmatrix}$ **1 точка**

за получаване на решението $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ **1 точка**

в) От $0 < a < b \Rightarrow 0 < 4a < 4b \Rightarrow 0 < 4a + x^2 < 4b + x^2$ **1 точка**

и за да е вярно неравенството $\log_{\sqrt{2-x}}\left(x^2 + 4a\right) < \log_{\sqrt{2-x}}\left(x^2 + 4b\right) \Rightarrow \sqrt{2-x} > 1 \Rightarrow x < 1$ **1 точка**