МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

IX клас

<u>Зад.1</u> Дадени са уравненията:
$\frac{x}{27x^3+1}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0$, $\frac{13y^2+4}{4-y^2}+\frac{7y}{y-2}=0$ и $9z^4-37z^2+4=0$. Кои от тях са еквивалентни?

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Дадено е уравнението $(2k+1)x^2-(k+2)x+k-1=0$. Да се намерят стойностите на параметъра k, за които е изпълнено равенството $x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$.

(7 точки)

<u>Зад.3</u> Даден е ΔABC с височина CH $(H\in AB)$. Окръжност с диаметър CH пресича страните AC и BC съответно в точки P и Q така, че $PQ=CH$.

а) Да се докаже, че ΔABC е правоъгълен;

б) Ако радиусът на вписаната окръжност в ΔABC е $4\sqrt{3}+6$ пъти по-малък от периметъра му, да се намери стойността на израза $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, където a, b и c са страните на триъгълника.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.
Указание за проверка
IX клас

<u>Зад.1</u> Дефиниционното множество на първото уравнение е $D: x \neq -\frac{1}{3}$.

$$(1)\ \frac{x}{27x^3+1}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{(3x+1)(9x^2-3x+1)}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow (3x-1)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\in D$$

(2 точки)

Дефиниционното множество на второто уравнение е $D: y \neq \pm 2$.

$$(2)\ \frac{13y^2+4}{4-y^2}+\frac{7y}{y-2}=0 \Leftrightarrow \frac{13y^2+4}{(2-y)(2+y)}-\frac{7y}{2-y}=0 \Rightarrow 3y^2-7y+2=0 \Rightarrow y_1=\frac{1}{3}\in D, y_2=2\notin D$$

(2 точки)

Решенията на уравнението (3) $9z^4-37z^2+4=0$ са $z_1=\pm\frac{1}{3}, z_2=\pm 2$ **(2 точки)**

$\Rightarrow$ еквивалентни са уравненията (1) и (2) **(1 точка)**

<u>Зад.2</u> Допустимите стойности на параметъра k са всички реални числа, различни от $-\frac{1}{2}$.

(1 точка)

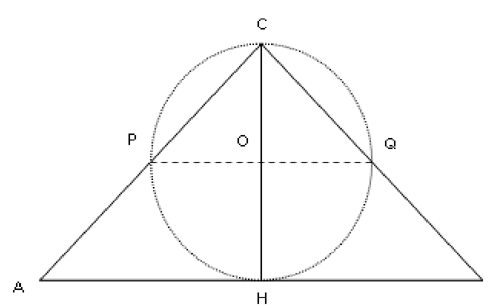
От формулите на Виет следва, че $x_1x_2=\frac{k-1}{2k+1}$ и $x_1+x_2=\frac{k+2}{2k+1}$. **(2 точки)**

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$x_1x_2((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow \frac{k-1}{2k+1}\left(\left(\frac{k+2}{2k+1}\right)^2-\frac{2(k-1)}{2k+1}\right)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$$

$\Rightarrow 9k^2-3k=0 \Rightarrow k=0, k=\frac{1}{3}$ -допустими стойности. **(4 точки)**

<u>Зад.3</u> **а)** По условие $CH=2R$ и $PQ=CH$ $\Rightarrow PQ=2R \Rightarrow \angle ACB=\angle PCQ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PQ}=90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ е правоъгълен **(2 точки)**.



б) От ΔABC -правоъгълен

$\Rightarrow r=p-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$ **(1 точка)**.

По условие $\frac{P_{ABC}}{r}=4\sqrt{3}+6 \Rightarrow \frac{a+b+c}{\frac{a+b-c}{2}}=4\sqrt{3}+6$

$$\Rightarrow 2(a+b)+2c=(4\sqrt{3}+6)(a+b)-(4\sqrt{3}+6)c \Rightarrow (4\sqrt{3}+4)(a+b)=(4\sqrt{3}+8)c$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{4\sqrt{3}+8}{4\sqrt{3}+4} \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **(4 точки)**.