Общински кръг на LVII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2008 година – София

9. клас

1. а) Решете уравнението
$\left(x-\sqrt{4-3x}\right)\left(2x^2-3x+4\right)=6\left(x-\sqrt{4-3x}\right)$. **4 точки**

б) Решете уравнението $x^2+5x+1-\dfrac{x^2+x-6}{x+3}=0$ и проверете

има ли корени, които са по-малки от числото $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$. **3 точки**

2. Остроъгълният триъгълник ABC с ортоцентър H е вписан в окръжност. Височините му BQ и CP $\left(Q\in AC, P\in AB\right)$ пресичат окръжността съответно в точки B_1 и C_1. Отсечката B_1C_1 пресича страните AC и AB съответно в точки L и F. Точката F е средата на отсечката LC_1.

а) Докажете, че триъгълниците HCB_1 и HBC_1 са равнобедрени
и намерете отношенията $B_1L:LC_1$ и $QH:HB$, ако $CH:HP=3:2$.
4 точки

б) Докажете, че $LH \parallel AB$ и $AC=BC$. **3 точки**

3. Реалните числа a,b,c и d са две по две различни и са такива, че a и b са корените на уравнението $x^2-3cx-d=0$, а c и d са корените на уравнението $x^2-3ax-b=0$.

а) Докажете, че a и c са корените на уравнението
$x^2-4x+1=0$. **4 точки**

б) Да се намерят стойностите на изразите $P=a+b+c+d$ и
$Q=abcd$. **3 точки**