Общински кръг на LVII Републиканска олимпиада по математика
15 март 2008 година – София

8. клас

1. Даден е изразът $A = \dfrac{a^2+10a+25}{9a^4-1} : \left(\dfrac{3a+2}{3a^2+1} - \dfrac{18a^3-a-9}{9a^4-1} + \dfrac{3a-2}{3a^2-1} \right)$.

а) Определете допустимите стойности на израза и го опростете.

4 точки

б) Намерете стойностите на a, за които е изпълнено неравенст-вото $-4A > \sqrt{3} - 20$. **3 точки**

2. Дадена е окръжност с център O и радиус с дължина R. Точките A, B и C лежат на окръжността и я делят на три дъги в отношение $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = 6:5:1$. През точка C е построена допирателна към окръжността, а точките A_1 и B_1 са петите на перпендикулярите, спуснати съответно от A и B към тази допирателна. Правата BB_1 пресича окръжността в точка D.

а) Намерете ъглите на четириъгълника $ABDC$ и лицето на четириъгълника ABB_1A_1. **4 точки**

б) Докажете, че разстоянието от точка O до правата BC е равно на половината от хордата CD. **3 точки**

3. а) Опростете израза $\sqrt{x^2 - \sqrt{20}x + 5} - \sqrt{x^2 + \sqrt{20}x + 5}$ и пресметнете стойността му, ако $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

3 точки

б) Докажете, че ако a, b, c са дължини на страните на триъгълник, уравнението $b^2x^2 + \left(b^2+c^2-a^2\right)x + c^2 = 0$ няма реални корени.

4 точки